Physique

MP

2011

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

Ce problème est constitué de deux parties largement indépendantes. Certaines valeurs numériques sont regroupées en fin d'énoncé. Les résultats numériques fournis par les candidats tiendront compte du nombre de chiffres significatifs des valeurs numériques de l'énoncé. Dans l'ensemble du sujet on notera j le nombre complexe dont le carré vaut -1.

Laser de forte puissance

Ce problème présente une méthode performante d'amplification d'impulsions laser, appelée technique CPA (chirped pulse amplification), qui est mise en œuvre en laboratoire depuis les années 2000. Cette technique est utilisée dans les lasers de forte puissance, comme par exemple le laser petawatt au Laboratoire pour l'Utilisation des Lasers Intenses de l'École Polytechnique et sera utilisée dans le projet européen ELI (Extreme Light Infrastructure).

La technique CPA consiste à étaler spatialement et temporellement à l'aide d'une paire de réseaux de diffraction une impulsion temporellement courte, puis d'amplifier l'impulsion couleur après couleur, de sorte que la puissance dans le matériau amplificateur reste en-dessous d'un seuil destructeur. On recomprime ensuite l'impulsion par un dispositif symétrique de réseaux pour obtenir une impulsion très intense.

I Étirement temporel d'une impulsion laser

Après avoir établi les propriétés fondamentales des réseaux de diffraction, cette partie étudie la manière dont on peut étirer temporellement une impulsion laser de courte durée avec une paire de réseaux.

I.A – Diffraction par un réseau plan

Le réseau utilisé est un réseau en réflexion constitué d'une succession de facettes réfléchissantes contenues dans le plan Oxz. Il est placé dans le vide et éclairé par une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ et d'amplitude A_0.

I.A.1) Énoncer le principe de Huygens et Fresnel.

I.A.2) On considère une facette contenue dans le plan Oxz (le repère $Oxyz$ étant orthonormé direct). Suivant Ox la largeur de la facette est b (elle est contenue entre $x = 0$ et $x = b$), alors que sa longueur (suivant Oz) est très grande devant λ. L'onde incidente, est contenue dans le plan Oxy et fait un angle i_0 avec l'axe Oy ($i_0 \in [0, \pi/2]$). On observe l'onde diffractée dans la direction du plan Oxy faisant un angle θ avec Oy ($\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$).

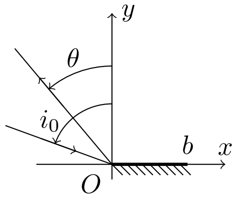

Figure 1

a) Justifier qu'on se limite à l'étude de l'onde diffractée dans le plan Oxy.

b) Établir l'expression de $\underline{s}_0(\theta)$, amplitude complexe de la vibration lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ.

c) En déduire l'éclairement $I_0(\theta)$ diffracté dans la direction θ par une facette. Préciser la valeur θ_0 de l'angle θ pour laquelle on a un maximum d'éclairement. Quel résultat d'optique géométrique retrouve-t-on ?

d) Tracer l'allure de l'intensité lumineuse en fonction de $\sin\theta$. Préciser sur le graphique la largeur de la tache centrale de diffraction.

I.A.3) On considère un réseau constitué de N facettes identiques à la précédente, translatées les unes par rapport aux autres de la distance $a > b$ suivant Ox (cf. **figure 2**). L'onde incidente et la direction d'observation n'ont pas changé.

On numérote les facettes de 0 à $N - 1$ de façon à ce que la facette de rang n est comprise entre $x = na$ et $x = na + b$.

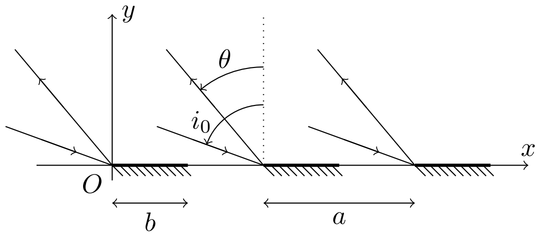

Figure 2

a) Soit $\underline{s}_n(\theta)$ l'amplitude complexe de la vibration lumineuse diffractée à l'infini dans la direction θ par la énième facette. Montrer que l'on peut mettre $\underline{s}_n(\theta)$ sous la forme :

$$\underline{s}_n(\theta) = \underline{s}_0(\theta)\exp(jn\phi)$$

où ϕ est un déphasage à exprimer en fonction de λ, a et des angles i_0 et θ.

b) En déduire l'expression de l'éclairement $\mathrm{I}(\theta)$ diffracté à l'infini dans la direction θ par l'ensemble des fentes.

c) La **figure 3** représente le tracé de $\mathrm{I}(\theta)$ en fonction de $\sin\theta$ en incidence normale ($i_0 = 0$) pour une radiation de longueur d'onde $\lambda = 1050$ nm.

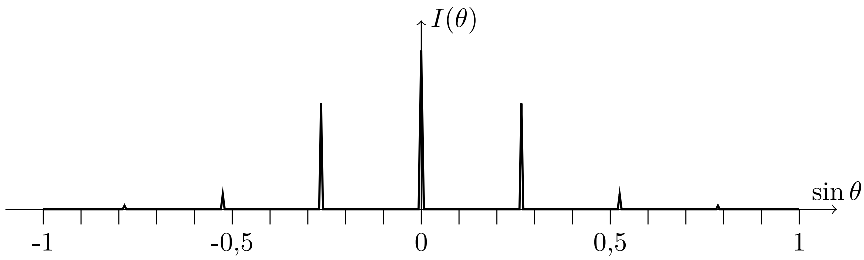

Figure 3

À quel domaine des ondes électromagnétiques appartient cette longueur d'onde ?

Commenter ce tracé. En particulier, on déduira de la position des maxima la valeur du pas a du réseau. Préciser l'ordre d'interférence pour chacun des pics visibles. Pourquoi n'en voit-on pas plus ? Estimer la valeur de b.

d) Que se passe-t-il si on éclaire le réseau avec une lumière polychromatique ? Tracer $\mathrm{I}(\theta)$ dans les mêmes conditions qu'à la question précédente pour une onde composée de deux radiations monochromatiques de longueurs d'onde $\lambda_1 = 1050$ nm et $\lambda_2 = 1200$ nm. Laquelle est la plus déviée ?

I.B – Diffraction par un réseau à échelettes

En pratique on préfère utiliser un réseau à échelettes constitué de facettes réfléchissantes (largeur b) inclinées d'un angle α par rapport au plan du réseau. Une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ éclaire le réseau sous un angle i_0 par rapport à l'axe Oy et on observe l'onde diffractée à l'infini dans la direction faisant un angle θ avec ce même axe. Les angles d'incidence et d'observation par rapport à la normale à la facette sont respectivement γ_0 et γ (cf. **figure 4**).

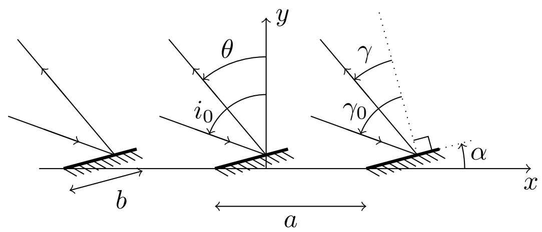

Figure 4

I.B.1) Diffraction par une facette

a) Exprimer la différence de marche à l'infini entre les ondes correspondant à deux rayons incidents dont l'un arrive sur l'extrémité O de la facette et l'autre en un point P quelconque de la facette en fonction de γ_0, γ et de la distance $x' = OP$ (cf. **figure 5**).

b) En déduire l'expression de l'amplitude complexe de la vibration lumineuse diffractée par une facette dans la direction γ.

c) Quelle est la valeur de γ correspondant au maximum d'éclairement de la figure de diffraction ?

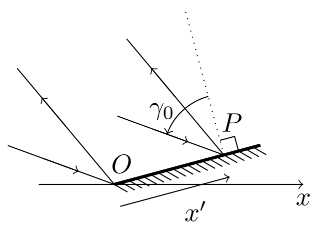

Figure 5

I.B.2) Diffraction par le réseau

a) Exprimer le déphasage entre deux ondes diffractées par deux facettes successives séparées d'une distance a, en fonction de a et des angles i_0 et θ.

b) On note θ_p les valeurs des directions d'observation correspondant aux maxima principaux. Exprimer $\sin\theta_p$ en fonction de i_0, a, λ et de l'ordre d'interférence p.

c) On veut faire coïncider pour une longueur d'onde $\lambda = 1050$ nm, le maximum à l'ordre 1 du réseau avec le maximum de la figure de diffraction par une facette. Donner l'expression de l'angle α permettant de réaliser cette condition en fonction de a, λ et i_0.

Sachant qu'il s'agit d'un réseau constitué de 1740 facettes par millimètre et qu'il est utilisé sous une incidence $i_0 = 61{,}0°$, calculer α ainsi que l'angle θ_1.

d) Quel est l'intérêt de ce réseau par rapport au réseau plan du **I.A** ?

I.C – Étirement temporel d'une impulsion laser avec une paire de réseaux

On utilise deux réseaux identiques, placés symétriquement dans le vide. Ils sont parallèles et distants de d. L'onde incidente, plane progressive arrive sur le premier réseau en faisant un angle i_0 avec sa normale. Les caractéristiques des réseaux sont telles que seuls les rayons à l'ordre 1 sont à prendre en compte. La **figure 6** représente la marche d'un tel rayon pour une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ.

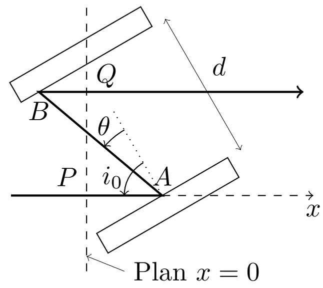

Figure 6

En notant θ l'angle que fait ce rayon avec la normale au premier réseau on a (avec a le pas du réseau) :

$$\sin i_0 + \sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$

I.C.1) Cas d'une onde monochromatique

a) Justifier que, quelle que soit la longueur d'onde, le rayon émergent de l'ensemble est parallèle au rayon incident.

b) On note P et Q les intersections entre les rayons incident et émergent et le plan $x = 0$ (cf. **figure 6**). Calculer le chemin optique entre P et Q en fonction de i_0, θ et la distance d entre les réseaux. En déduire le temps t de parcours entre P et Q.

I.C.2) Cas d'un doublet

L'onde incidente est constituée de deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

a) Faire un schéma de la marche des deux rayons dans la paire de réseaux. On fera clairement apparaître les angles θ_1 et θ_2 correspondant respectivement aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2.

b) On note $\Delta t = t_2 - t_1$ le décalage temporel entre les deux rayons émergents (t_i représentant la date d'arrivée du rayon correspondant à λ_i). Montrer que l'on peut écrire Δt sous la forme :

$$\Delta t = \frac{d}{c}\left(f(\lambda_2) - f(\lambda_1)\right) \qquad \text{avec } f(\lambda) = \frac{\cos^2 i_0 + \frac{\lambda}{a}\sin i_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{a} - \sin i_0\right)^2}}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

c) On a $d = 70$ cm, $a = 0{,}58$ μm, $\lambda_1 = 1050$ nm, $\lambda_2 = 1060$ nm et $i_0 = 61{,}0°$. Calculer Δt et la dérive de fréquence β définie par :

$$\beta = \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} \qquad \text{où } \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

On exprimera β en $\text{nm}\cdot\text{ns}^{-1}$. Quel est le signe de β ? Interpréter.

I.C.3) Cas d'une impulsion laser

On éclaire maintenant la paire de réseaux précédente avec une impulsion laser (onde plane progressive) de longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = 1050$ nm et de durée $\tau = 1$ ps. On supposera que l'amplitude de l'onde est constante sur la durée τ et égale à A_0. En un point d'abscisse $x = 0$ on peut alors écrire l'onde $\underline{a}(t)$ en notation complexe sous la forme :

$$\underline{a}(t) = \begin{cases} A_0 \exp(j2\pi\nu_0 t) & \text{si } t \in [0,\tau] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad\qquad \text{avec } \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

On rappelle qu'une telle onde peut s'écrire sous la forme d'une somme d'ondes harmoniques :

$$\underline{a}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\nu)\exp(j2\pi\nu t)d\nu \qquad \text{où } \underline{A}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(t)\exp(-j2\pi\nu t)dt$$

a) Exprimer $\underline{A}(\nu)$ en fonction de A_0, τ, ν_0 et ν. Que représente $|\underline{A}(\nu)|$? Tracer l'allure de $|\underline{A}(\nu)|$ en fonction de ν. On fera apparaître ν_0 sur ce graphique ainsi que les deux premières valeurs ν_1 et ν_2 de la fréquence ($\nu_1 < \nu_0 < \nu_2$) pour lesquelles $|\underline{A}(\nu)| = 0$.

b) Donner l'expression puis la valeur numérique de la largeur spectrale $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$. Comparer à la fréquence moyenne ν_0 et en déduire la largeur spectrale en longueur d'onde $\Delta\lambda$ de l'impulsion.

c) Cette impulsion est envoyée sur la paire de réseaux. Expliquer pourquoi on peut parler d'étirement temporel. En supposant que la dérive de fréquence β est de l'ordre de $5\ \text{nm}\cdot\text{ns}^{-1}$ dans le domaine de fréquence utilisé, quelle est la durée de l'impulsion qui émerge du système ? A-t-on réalisé le but recherché ?

d) Une fois l'impulsion étirée elle peut être amplifiée puis recomprimée avec une deuxième paire de réseaux afin de retrouver une impulsion de la durée initiale. Quelle condition doit vérifier la dérive de fréquence pour cette deuxième paire de réseau ?

En pratique cette condition est réalisée en ajoutant un ensemble de deux lentilles afocal entre les réseaux.

II Réflexion sur une surface métallique, ionisation, puissance limite

Lors de la réflexion d'une onde électromagnétique de forte intensité sur une surface métallique (comme dans le cas du réseau de la **partie I**), celle-ci risque d'être endommagée du fait de l'ionisation du milieu sous l'effet du champ électrique. Dans cette partie, le but est de déterminer l'ordre de grandeur de la puissance maximale de l'onde incidente pour éviter ce phénomène.

Le métal (de l'or) occupe tout le demi-espace $z > 0$, le demi espace $z < 0$ étant de l'air assimilé au vide. L'onde incidente est supposé monochromatique et se propage dans le vide suivant l'axe Oz dans le sens des z croissants (incidence normale). La longueur d'onde dans le vide de cette onde est $\lambda = 1050$ nm.

II.A – Propagation d'une onde électromagnétique dans le métal

II.A.1) Conductivité du milieu

Le métal est constitué d'ions et d'électrons libres. On note n le nombre d'électrons libres par unité de volume, $q = -e$ la charge d'un électron et m sa masse. La vitesse d'un électron au point M à l'instant t est notée $\vec{v}(M,t)$.

On adopte le modèle suivant (modèle de Drude) :

- les électrons sont traités dans le cadre de la mécanique classique ;
- le déplacement des électrons est faible devant la longueur d'onde et l'accélération des électrons en M est $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M,t)$;
- les électrons subissent de la part du réseau cristallin une force de la forme $-\dfrac{m}{\tau}\vec{v}(M,t)$, où τ est une constante caractéristique du milieu ;
- l'effet du champ magnétique sur un électron est négligeable.

a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron, donner l'équation différentielle vérifiée par $\vec{v}(M,t)$.

On se place pour toute la suite dans le cas d'un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω : $\vec{v}(M,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{v}}(M,t)\right)$ avec $\underline{\vec{v}}(M,t) = \underline{\vec{v}}(M)e^{j\omega t}$.

Donner l'expression de $\underline{\vec{v}}(M,t)$ en fonction du champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}(M,t)$.

b) Justifier que la contribution des ions au vecteur densité de courant électrique $\underline{\vec{J}}(M,t)$ est négligeable.

c) Montrer que l'on peut écrire :

$$\underline{\vec{J}}(M,t) = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}(M,t) \qquad \text{avec } \underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + j\omega\tau}$$

où σ_0 est une constante réelle à exprimer en fonction des données. À quoi correspond σ_0 ?

d) On donne : masse volumique de l'or $\mu = 19300\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$; masse molaire de l'or $M = 197\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$; $\sigma_0 = 4{,}5 \times 10^7\ \mathrm{S \cdot m^{-1}}$.

En supposant que chaque atome donne un électron libre, calculer la densité d'électrons n dans l'or ainsi que la constante τ.

Montrer, en tenant compte des applications numériques précédentes, que l'on peut simplifier l'expression de la conductivité à :

$$\underline{\sigma} = -j\frac{nq^2}{m\omega}$$

II.A.2) Nature de l'onde

On suppose que le milieu n'est pas magnétique et qu'à tout instant et en chaque point la densité volumique de charge électrique est nulle.

a) Écrire les équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique et magnétique dans le conducteur.

b) En déduire l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique.

c) On cherche à étudier la propagation d'un champ de la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{E}(0)e^{j(\omega t - kz)}\vec{u}_x$.

Montrer que k doit être solution de

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et ω_p une constante caractéristique du matériaux dont on donnera l'expression.

d) Calculer ω_p et montrer que ω^2 est négligeable devant ω_p^2.

e) En déduire k en fonction de ω_p et c ainsi que les expressions des champs électrique et magnétique. Quelle est la nature de l'onde ?

f) Calculer numériquement la distance caractéristique sur laquelle les champs sont non négligeables. Justifier l'hypothèse milieu semi-infini.

II.B – Réflexion d'une onde électromagnétique

Nous voulons exprimer l'amplitude complexe du champ dans le conducteur en fonction de l'amplitude de l'onde incidente.

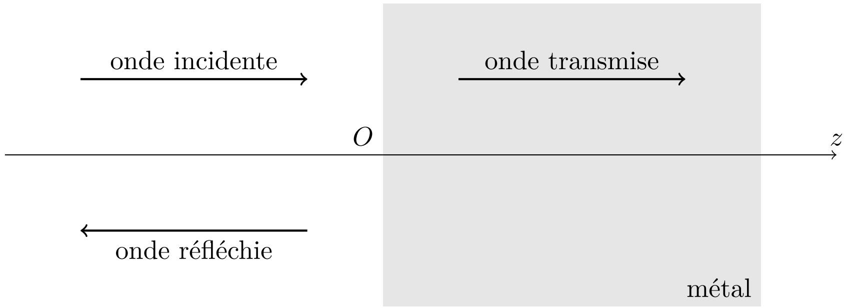

Figure 7

Les champs électriques des ondes incidente et réfléchie dans le vide sont respectivement :

$$\underline{\vec{E}}_i(z,t) = E_0 e^{j\omega(t-z/c)}\vec{u}_x \qquad \text{et} \qquad \underline{\vec{E}}_r(z,t) = rE_0 e^{j\omega(t+z/c)}\vec{u}_x$$

où r est le coefficient, éventuellement complexe, de réflexion.

II.B.1) Donner les expressions des champs magnétiques correspondants.

II.B.2) Quelles relations les champs électriques et magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise doivent-ils vérifier ?

II.B.3) En déduire l'expression du coefficient de réflexion. Que peut-on dire de l'amplitude de l'onde réfléchie par rapport à celle de l'onde incidente ?

II.B.4) Donner l'expression de l'amplitude $E(0) = |\underline{E}(0)|$ du champ électrique à la surface du conducteur en fonction de E_0, ω et ω_p.

II.B.5) On note v_0 la vitesse maximale atteinte par les électrons dans le conducteur. En tenant compte des ordres de grandeur de ω et ω_p, montrer que :

$$v_0 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{nm}}E_0$$

II.C – Ionisation dans le métal, limite en puissance

Les électrons accélérés risquent d'ioniser par impact les atomes voisins, l'équilibre de la matière ainsi rompu provoque l'éjection de particules hautement ionisés et la destruction du dépôt.

II.C.1) Sachant que l'or a pour numéro atomique $Z = 79$ et un rayon atomique $r = 140$ pm, estimer l'ordre de grandeur de l'énergie nécessaire pour provoquer une ionisation. Calculer cette énergie.

En fait les tables donne une énergie de l'ordre de 9 eV. Comment peut-on expliquer l'écart entre les deux valeurs. On prendra la valeur tabulée pour la suite des calculs.

II.C.2) En supposant que lors d'un choc électron-ion toute l'énergie cinétique de l'électron est transmise à l'ion, quelle est l'ordre de grandeur de la vitesse susceptible de créer une ionisation supplémentaire.

II.C.3) Quelle est l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente susceptible de donner lieu à une telle vitesse ?

II.C.4) Quelle est la puissance moyenne de cette onde sachant que la section du faisceau est de l'ordre de 260 cm^2 ?

II.C.5) Expérimentalement, pour une impulsion de une picoseconde, on mesure un seuil d'endommagement de 0,5 J $\cdot$ cm^{-2}. Comparer au résultat précédent et commenter la pertinence du modèle.

Données

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^8$ m $\cdot$ s^{-1}
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ (SI)
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ (SI)
Charge de l'électron	$q = -e = -1{,}60 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	$m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Constante d'Avogadro	$N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1}

• • • FIN • • •