Centrale PSI 2
Calculatrices autorisées

Notations.

On note $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels. Si n est un entier positif, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, boté (X, Y) pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On note $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$ la norme associée. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On assimile $\mathbb{R}^n$ à l'espace des vecteurs colonnes d'ordre n et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à son algèbre d'endomorphismes. Ainsi, $(X, Y) = {}^tXY$. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme de ses éléments diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. On rappelle que $\mathrm{Tr}(A)$ est égale à la somme des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs ordres de multiplicité. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = \det(A - XI_n)$ et on définit $R(A) = \{{}^tXAX/\ X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = 1\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.

Les parties ainsi que les questions ne sont pas indépendantes.

1 Généralités.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A. Démontrer que les valeurs propres réelles de A sont dans $R(A)$.

I.B.

I.B.1) Démontrer que les éléments $a_{i,i}$ $(1 \leq i \leq n)$ de la diagonale de A sont dans $R(A)$.

I.B.2) En considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que les éléments $a_{i,j}$ avec $i \neq j$ ne sont pas nécessairement dans $R(A)$.

I.C. On considère deux nombres réels $a \in R(A)$ et $b \in R(A)$, avec $a < b$. Soient X_1 et X_2 deux vecteurs de norme 1 tels que ${}^tX_1AX_1 = a$, ${}^tX_2AX_2 = b$.

I.C.1) Démontrer que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants.

I.C.2) On pose $X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$. Démontrer que la fonction $\phi\ :\ \lambda \mapsto \frac{{}^tX_\lambda AX_\lambda}{\|X_\lambda\|^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

I.C.3) En déduire que le segment $[a, b]$ est inclus dans $R(A)$.

I.D. Démontrer que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors $0 \in R(A)$.

I.E. Soit Q une matrice orthogonale réelle. Démontrer que $R(A) = R({}^tQAQ)$.

I.F. On considère les conditions suivantes :

(C_1) $\mathrm{Tr}(A) \in R(A)$

(C_2) il existe une matrice orthogonale réelle Q telle que la diagonale de la matrice ${}^tQAQ$ soit de la forme $(\mathrm{Tr}(A), 0, \ldots, 0)$.

I.F.1) Démontrer que la condition (C_2) entraine la condition (C_1).

I.F.2) On suppose que $x \in R(A)$. Démontrer qu'il existe une matrice Q_1 orthogonale telle que ${}^tQ_1AQ_1 = \begin{pmatrix} x & L \\ C & B \end{pmatrix}$ où B est une matrice de format $(n-1, n-1)$ $(B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}))$, C un vecteur colonne à $n-1$ éléments $(C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}))$ et L un vecteur ligne à $n-1$ éléments $(L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}))$.

I.F.3) Démontrer que si la matrice A est symétrique, il en est de même pour la matrice B ci-dessus.

I.F.4) Démontrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tQ_1AQ_1)$.

I.F.5) En déduire que si A est symétrique, la condition (C_1) entraîne la condition (C_2). *On pourra raisonner par récurence sur n.*

2 Matrices symétyriques de format $(2, 2)$.

Dans toute cette partie A et B désignent des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \leq \mu_2$) les valeurs propres de A (resp. B).
De plus, on dira qu'une matrice symétrique S est positive, ce que l'on notera $S \geq 0$, si et seulement si toutes ses valeurs propres sont ≥ 0.

II.A. Démontrer que $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$.

II.B. On considère l'ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ défini par l'équation $(AX, X) = 1$.

II.B.1) Caractériser les conditions sur les λ_i pour lesquelles cet ensemble est

a) vide ;

b) la réunion de deux droites ;

c) une ellipse ;

d) une hyperbole.

II.B.2) Représenter sur une même figure les ensembles Γ obtenus pour A diagonale avec $\lambda_1 \in \{-4, -1, 0, 1/4, 1\}$ et $\lambda_2 = 1$.

II.C. Démontrer que $\mathrm{Tr}(AB) \leq \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$. *On pourra utiliser une matrice orthogonale P telle que ${}^tPBP$ soit une matrice diagonale, pour obtenir ${}^tPAP = A' = (a'_{i,j})$ avec* $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = a'_{1,1} + a'_{2,2}$.

II.D. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ et on suppose $A \geq 0$.

II.D.1) Démontrer que $\det(A) \geq 0$.

II.D.2) Démontrer que ${}^tXAX \geq 0$ pour tout vecteur X.

II.D.3) Démontrer que $a \geq 0$ et $d \geq 0$.

II.D.4) Soit $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique. Démontrer que

$$S \geq 0 \text{ si et seulement si } (\mathrm{Tr}(S) \geq 0 \text{ et } \det(S) \geq 0)$$

II.E. On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$. On suppose dans cette section que $A \geq 0$ et $B \geq 0$.

II.E.1) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(b_1, \sqrt{\det(A)})$ et $(b_2, \sqrt{\det(B)})$, démontrer que

$$b_1b_2 \leq \sqrt{a_1a_2d_1d_2} - \sqrt{\det(A)\det(B)}$$

II.E.2) En calculant $\det(A+B) - \det(A) - \det(B)$, en déduire que

$$\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A)\det(B)}$$

II.F. On suppose dans cette sous-partie que $A \geq 0$, $B \geq 0$, $\det(A)\det(B) \neq 0$ et $b_1b_2 \neq 0$.

II.F.1) Démontrer que l'on a l'égalité dans la formule de la question II.E.2 si et seulement si les vecteurs (a_1, d_1) et (a_2, d_2) sont liés, ainsi que les vecteurs $(b_1, \sqrt{\det(A)})$ et $(b_2, \sqrt{\det(B)})$.

II.F.2) Démontrer alors que l'on a l'égalité dans la formule de la question II.E.2 si et seulement si les matrices A et B sont proportionnelles ($A = \lambda B$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$).

II.G. On considère la relation suivante sur l'ensemble des matrices symétriques réelles de format $(2, 2)$: on dit que $S \leq S'$ si et seulement si la matrice symétrique $S' - S$ vérifie $S' - S \geq 0$. Démontrer que la relation $\leq$ ci-dessus est bien une relation d'ordre sur les matrices symétriques réelles de format $(2, 2)$.

II.H. On considère une suite $(A_n)_{n\geq 0}$ avec $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$ qui est symétrique pour tout n.

On suppose que la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée pour la relation d'ordre définie à la question précédente.

II.H.1) Démontrer que pour tout vecteur X ; la suite $({}^tXA_nX)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée.

II.H.2) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ sont croissantes et majorées.

II.H.3) En considérant le vecteur $X = (1,1)$, démontrer que la suite de matrices $(A_n)_{n\geq 0}$ est convergente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est à dire que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes dans $\mathbb{R}$.

3 Matrices symétriques définies positives.

Dans cette partie toutes les matrices sont de format (n,n) où n est un entier ≥ 2. On dit qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

III.A. Soit A une matrice symétrique définie positive. Démontrer qu'il existe une matrice inversible Y telle que $A = {}^tYY$.

III.B. Soient A une matrice symétrique définie positive et B une matrice symétrique. Démontrer qu'il existe une matrice inversible T telle que

$$^tTAT = I_n \quad \text{et} \quad {}^tTBT = D$$

où D est une matrice diagonale (et I_n est la matrice identité).

III.C. Soient A et B deux matrices symétriques définies positives.

III.C.1) Démontrer que $\det(I_n + B) \geq 1 + \det(B)$.

III.C.2) En déduire que $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

III.D. Soient x un nombre réel > 0, β un nombre réel tel que $0 < \beta < 1$. Démontrer que $x^\beta \leq \beta x + 1 - \beta$.

III.E. Soient A et B deux matrices symétriques définies positives, α et β deux nombres réels > 0 tels que $\alpha + \beta = 1$; démontrer que

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det(A))^\alpha (\det(B))^\beta$$

III.F. Pour $1 \leq i \leq k$, soient A_i des matrices symétriques définies positives et α_i des réels > 0 tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Démontrer que

$$\det(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k) \geq (\det(A_1))^{\alpha_1} \ldots (\det(A_k))^{\alpha_k}$$

On pourra raisonner par récurrence sur k.