Mathématique 2

PC **2011**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

- Dans tout le problème, n est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients réels.
- En particulier, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. Selon l'usage, on pourra librement identifier les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.
- On note $M_{i,j}$ le coefficient sur la i-ème ligne et j-ème colonne d'une matrice M.
- L'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. En particulier, si $(V,W)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, on pose

$$\langle V,W\rangle=\sum_{i=1}^{n}V_{i,1}W_{i,1}\qquad\text{et}\qquad\|V\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}V_{i,1}^2\right)^{1/2}$$

- La notation ${}^tM$ désigne la transposée d'une matrice M, $\mathrm{rg}(M)$ son rang et, lorsque M est carrée, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace. On rappelle que $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ pour tout $A\in\mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{R})$.
- On note également $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales d'ordre n, $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif et $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant négatif.
- Par définition, une rotation est un automorphisme orthogonal de l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

Objectif du problème

On se donne des vecteurs $X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_m$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on cherche à déterminer, si c'est possible, une rotation r de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$r(X_i)=Y_i\qquad\text{pour}\qquad 1\leqslant i\leqslant m$$

Cela revient à déterminer une matrice $W\in\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ réalisant

$$WX_i=Y_i\qquad\text{pour}\qquad 1\leqslant i\leqslant m$$

Sans hypothèse sur les vecteurs X_i et Y_i, une telle rotation n'a pas de raison d'exister, ni d'être unique. C'est pourquoi on s'intéressera plutôt, dans la suite, au problème plus faible suivant : trouver une matrice $W\in\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\sum_{i=1}^m\|WX_i-Y_i\|_2^2$, autrement dit telle qu'en un sens les WX_i soient « aussi proches que possible » des Y_i.

I Questions préliminaires

I.A – Généralités sur les matrices orthogonales

I.A.1) Quel est le déterminant d'une matrice de $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$? de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$? On justifiera les réponses.

I.A.2) $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ est-il un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?

I.A.3) Montrer que les valeurs absolues des coefficients d'une matrice orthogonale sont inférieures ou égales à 1.

I.B – Un exemple numérique

Dans cette section, $n=m=2$. On pose

$$X_1=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}\sqrt2\\\sqrt2\end{pmatrix},\quad Y_1=\begin{pmatrix}\frac12\\\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix},\quad Y_2=\begin{pmatrix}-\frac12\\\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$$

On introduit les affixes respectives des vecteurs X_1,X_2,Y_1,Y_2 :

$$\alpha_1=2,\quad\alpha_2=\sqrt2+i\sqrt2,\quad\beta_1=\frac12+i\frac{\sqrt3}{2},\quad\beta_2=-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}$$

I.B.1) Exprimer ces affixes sous forme trigonométrique puis simplifier pour tout réel θ la quantité

$$f(\theta) = |\beta_1 - e^{i\theta}\alpha_1|^2 + |\beta_2 - e^{i\theta}\alpha_2|^2$$

I.B.2) Déterminer les valeurs de θ qui minimisent $f(\theta)$. Illustrer le résultat par un dessin.

II Un problème d'optimisation

Dans cette partie, on fixe des éléments $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on se propose d'obtenir une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$ et, dans certains cas, une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$.

Dans toute cette partie, on note X (respectivement Y) la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $X_1, \dots, X_m$ (respectivement $Y_1, \dots, Y_m$).

II.A* – *Un produit scalaire matriciel

II.A.1) Montrer que l'application

$$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}, \quad (M, N) \mapsto \operatorname{tr}((^tM)N)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On pose désormais

$$\langle M, N\rangle_F = \operatorname{tr}((^tM)N) \quad \text{et} \quad \|M\|_F = \langle M, M\rangle_F^{1/2}$$

II.A.2) Montrer que, pour toute matrice $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2 = \|WX - Y\|_F^2$$

II.A.3) Simplifier $\langle WM, WN\rangle_F$ et $\|WM\|_F$ pour $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2$.

II.A.4) Simplifier aussi $\langle MW, NW\rangle_F$ et $\|MW\|_F$ pour $W \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $(M, N) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})^2$.

***II.B* –** Dans cette section, on suppose que $m = n$.

II.B.1) Calculer $\|W\|_F$ pour $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

II.B.2) Montrer que si une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.B.3) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

***II.C* –** Dans cette section, m et n ne sont plus supposés égaux.

II.C.1) Justifier l'existence d'une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimisant $\|WX - Y\|_F^2$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \quad \|WX - Y\|_F^2 \leqslant \|ZX - Y\|_F^2$$

II.C.2) Montrer que les matrices $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ minimisant $\|WX - Y\|_F^2$ sont les matrices $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle WX, Y\rangle_F$.

II.C.3) Déterminer à l'aide de X et Y une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle WX, Y\rangle_F = \langle W, A\rangle_F$$

***II.D* –** Dans cette section, Δ désigne une matrice diagonale d'ordre n à coefficients positifs.

II.D.1) Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta\rangle_F$.

II.D.2) On suppose de plus que les coefficients diagonaux de la matrice Δ vérifient :

$$\Delta_{1,1} \geqslant \dots \geqslant \Delta_{r,r} > 0 \text{ et } \Delta_{i,i} = 0 \quad \text{pour } r+1 \leqslant i \leqslant n$$

(avec éventuellement $r = n$ dans le cas où tous les coefficients diagonaux de Δ sont non nuls). Déterminer toutes les matrices $W' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta\rangle_F$.

***II.E* –** Dans cette section, on admet que A peut s'écrire sous la forme $Q\Delta(^tP)$ avec $(Q, P) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des coefficients diagonaux vérifiant $\Delta_{1,1} \geqslant \dots \geqslant \Delta_{n,n} \geqslant 0$. Ce résultat sera démontré dans la **partie III**.

II.E.1) Déterminer à l'aide de P et Q une matrice $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A\rangle_F$, et appartenant à $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det P \cdot \det Q > 0$.

II.E.2) Montrer que si $\det A > 0$, il existe une unique matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A\rangle_F$, au sens où

$$\forall Z \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}), \quad \langle W, A\rangle_F \geqslant \langle Z, A\rangle_F$$

II.E.3) Dans cette question, on suppose que $\Delta_{n,n} = 0$. Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta\rangle_F$.

II.E.4) Dans cette question, on suppose que $\det A = 0$ et que $\det P \cdot \det Q < 0$. Déduire de la question précédente une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A\rangle_F$.

III Une décomposition matricielle

L'objectif de cette partie est d'établir le résultat admis dans la partie précédente.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $r \geqslant 1$.

III.A – Soit $B = ({}^tM)M$.

III.A.1) Montrer que B est une matrice symétrique réelle. Que peut-on en déduire ?

III.A.2) Montrer que B est positive, c'est-à-dire que pour tout $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $({}^tV)BV \geqslant 0$. En déduire que les valeurs propres de B sont positives.

III.A.3) Montrer que $\ker B = \ker M$. En déduire que $\mathrm{rg}(B) = r$. (M étant une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose $\ker M = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ MX = 0\}$.)

III.B – Dans la suite de cette partie, on note :

- f l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à M,
- g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à B,
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes ou non) de g rangées par ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_p$$

- et enfin $(v_1, \ldots, v_p)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres de g associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

III.B.1) On pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $u_i = \frac{1}{\mu_i} f(v_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Montrer que $(u_1, \ldots, u_r)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$.

III.B.2) Soit $\Delta = (\Delta_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice dont les seuls coefficients non nuls sont $\Delta_{1,1}, \ldots, \Delta_{r,r}$ qui valent $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ telles que

$$M = Q\Delta P^{-1} = Q\Delta({}^tP)$$

IV Sur la trace des matrices orthogonales

Dans cette partie, on étudie la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, ce qui va permettre d'aboutir dans les cas laissés en suspens dans la **partie II** à une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$.

IV.A –

IV.A.1) Déterminer la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

IV.A.2) Soit E un espace vectoriel euclidien, et w un automorphisme orthogonal de E. Justifier que les seules valeurs propres possibles pour w sont 1 et -1.

IV.A.3) Montrer que -1 est valeur propre de toute matrice $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

IV.A.4) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E, stable par un automorphisme orthogonal w de E, alors l'orthogonal de F est aussi stable par w.

IV.A.5) Montrer que pour tout $W \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, il existe $P_1 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $W_1 \in \mathcal{O}_{n-1}^+(\mathbb{R})$ tels que

$$W = P_1 \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & W_1 \end{pmatrix} ({}^tP_1)$$

où $0_{k,l}$ désigne la matrice nulle dans $\mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$.

IV.A.6) Conclure sur la trace maximale d'une matrice de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

IV.B – On rappelle que minimiser $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$ revient à maximiser $\langle W, A\rangle_F$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une certaine matrice qui peut s'écrire sous la forme $Q\Delta({}^tP)$ avec $(P, Q) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, à coefficients diagonaux vérifiant

$$\Delta_{1,1} \geqslant \ldots \geqslant \Delta_{n,n} \geqslant 0$$

IV.B.1) Déterminer une matrice $W' \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W', \Delta\rangle_F$ en commençant par écrire $\langle W', \Delta\rangle_F$ à l'aide de $\mathrm{tr}(W')$ et des coefficients $W'_{i,i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

IV.B.2) En déduire, lorsque $\det P \cdot \det Q < 0$, une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle W, A\rangle_F$.

V Calcul numérique

Dans cette partie, on étudie un algorithme permettant de calculer de manière approchée une matrice $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$ pour certaines matrices Y.

V.A – Étude d'une suite de réels

On considère $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels vérifiant :

$$x_0 > 0 \quad \text{et } x_{k+1} = x_k \cdot \frac{x_k^2+3}{3x_k^2+1} \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

V.A.1) Écrire une instruction en Maple ou Mathematica permettant de calculer les trente premiers termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ telle que $x_0 = 0{,}1$.

V.A.2) Représenter graphiquement le comportement d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ pour un $x_0 > 0$ quelconque. On effectuera les calculs nécessaires à une représentation soignée.

V.A.3) Démontrer la convergence d'une telle suite et préciser sa limite.

V.B – Étude d'une suite de matrices

On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i. Z_0 est inversible ;

ii. $Z_{k+1} = Z_k({}^tZ_kZ_k + 3I_n)(3{}^tZ_kZ_k + I_n)^{-1}$ pour $k \in \mathbb{N}$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n).

V.B.1) Montrer que pour toute matrice $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $3{}^tZZ + I_n$ est bien inversible.

V.B.2) Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. D'après la deuxième partie, Z_0 peut s'écrire sous la forme $QD({}^tP)$ avec $(Q,P) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'assertion $\mathcal{P}_k$ ainsi : « Z_k peut s'écrire sous la forme $QD_k({}^tP)$ avec D_k diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs ». Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.

V.B.3) Déterminer la limite de la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

V.C – Une application

On fixe $X_1, \ldots, X_m$ des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on note X la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $X_1, \ldots, X_m$. On fixe également $W_0 \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, et on pose $Y_0 = W_0X$. On suppose de plus la matrice X de rang n.

V.C.1) Montrer qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ contenant Y_0 tel que pour tout $Y \in \mathcal{U}$, l'on ait $\det(Y({}^tX)) > 0$.

V.C.2) Dans le cas où $Y \in \mathcal{U}$, quelle valeur donner à Z_0 pour que la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ converge vers $W \in \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^m \|WX_i - Y_i\|_2^2$?

• • • FIN • • •