e3a PSI B (4 heures)

Exercice 1.

1. Etudier la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ si $|x| < \sqrt{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

2.1. Donner, sur un même schéma, l'allure des représentations graphiques de f_1 et f_2.

2.2. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2.3. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si u est un réel strictement supérieur à $-n$ alors $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u$.

2.4. Prouver l'existence de $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

2.5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ que l'on exprimera sous la forme d'une intégrale.

3. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \int_0^{\pi/2} \cos^k(t)\,dx$.

3.1. Calculer J_0, J_1, J_2.

3.2. Trouver une relation de récurrence reliant J_k et J_{k+2}.

3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2.4.6.8.....(2n)}{1.3.5.7.....(2n+1)}$.

3.4. En déduire une expression de J_{2n+1} faisant intervenir $(n!)^2$ et $(2n+1)!$.

3.5. Rappeler la formule de Stirling et déduire de ce qui précède un équivalent de J_{2n+1} lorsque $n \to +\infty$.

4. A l'aide d'un changement de variable, donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre J_{2n+1} et u_n.

5. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Exercice 2.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté usuel, on note u l'endomorphisme dont la matrice canoniquement associée est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donner la nature géométrique de u et ses éléments caractéristiques.

2. Soit $d \in \mathbb{R}$ et $P(X) = X^3 + X^2 + d$. Déterminer les valeurs de d telles que le polynôme P soit scindé sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $Q(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_3[X]$ dont on note α, β et γ les racines dans $\mathbb{C}$.

3.1. Exprimer les coefficients a, b et c à l'aide des racines α, β et γ.

3.2. Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté usuel.

Exercice 3.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

- $a_1 \geq 1$,
- la suite (a_n) est bornée,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$,

- la série $\sum(a_n)$ diverge.

On note alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2,\ b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}$$

Dans tout l'exercice, on utilisera sans la démontrer la propriété suivante, notée (R) :

> Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **à termes strictement positifs**.
> **Si** $\begin{cases} (a) \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ (b) \quad \text{la série } \sum(u_n) \text{ diverge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k.$

1. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
En utilisant les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la propriété (R), prouver que :

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

2. 2.1. De façon analogue, montrer que

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

2.2. En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geq 2)$.

2.3. Retrouver ce résultat sans utiliser la propriété (R).

3. Etude de deux exemples.

3.1. On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) et déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

3.2. On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P). En utilisant la propriété (R) et la série $\sum(w_n)_{n\geq 2}$, déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

4. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).

4.1. Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$.

4.2. Prouver que

$$\frac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$$

4.3. Déterminer alors la nature de la série $\sum(a_n/A_n)_{n\geq 2}$.

4.4. A l'aide de la propriété (R) et des questions précédentes, déterminer alors la limite de b_n en $+\infty$.

5. Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que $v_n = o(u_n)$ et $\sum(v_n)$ diverge.

6. Soit (a_n) une suite vérifiant la propriété (P). Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.

Exercice 4.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(G, \times)$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.
On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall X \in G,\ X^p = I_n$$

où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $E = \mathrm{Vect}(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la partie G.
Une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = O_n$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

1. Quelle est le spectre d'une matrice nilpotente ?

2. Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3.1. Déterminer deux nombres complexes α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.

3.2. Prouver l'équivalence

$$A \text{ nilpotente} \iff \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = 0$$

On admettra dans toute la suite de l'exercice que cette propriété se généralise pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, c'est à dire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$A \text{ nilpotente} \iff \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$$

4. **4.1.** Vérifier que E est un espace vectoriel de dimension finie.

4.2. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(M_1, \ldots, M_r)$ d'éléments de G qui soit une base de E. On ne cherchera pas à calculer r ni à déterminer les matrices M_j.

5. On note U_p l'ensemble des racines p-ièmes de l'unité.

5.1. Préciser le cardinal de U_p et expliciter ses éléments.

5.2. Soit X une matrice élément de G et λ une valeur propre de X. Montrer que $\lambda \in U_p$.

6. Prouver que tout élément de G est diagonalisable.

7. Prouver que l'ensemble $\mathcal{S} = \{\mathrm{Tr}(X),\ X \in G\}$ est fini. Donner un majorant du cardinal de $\mathcal{S}$.
On considère alors l'application

$$\varphi \ : \ X \in G \mapsto \varphi(X) = (\mathrm{Tr}(XM_1), \ldots, \mathrm{Tr}(XM_r)) \in \mathbb{C}^r$$

8. Soient A et B deux éléments de G tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. On note $N = AB^{-1} - I_n$.

8.1. Justifier que $AB^{-1} \in G$. En déduire que N est diagonalisable.

8.2. Montrer que

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\},\ \mathrm{Tr}(AM_i) = \mathrm{Tr}(BM_i)$$

En déduire que

$$\forall X \in E,\ \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$$

8.3. Soit $k \in \mathbb{N}$. En écrivant que $(AB^{-1})^k = AB^{-1} \ldots AB^{-1}$ (k facteurs) et en utilisant la question précédente, montrer que

$$\mathrm{Tr}((AB^{-1})^k) = n$$

8.4. Calculer alors $\mathrm{Tr}(N), \mathrm{Tr}(N^2), \ldots, \mathrm{Tr}(N^n)$. Que peut-on dire de la matrice N ?

8.5. Montrer que φ est injective.

9. Montrer que $\varphi(G) \subset \mathcal{S}^r$.

10. Que peu-on en déduire pour G ?