Concours Communs Polytechniques 2012

Mathématiques 2 - Filière PC (durée : 4 heures)

Les calculatrices sont interdites.

Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

On s'intéresse ici aux propriétés de la fonction polylogarithme, définie comme série entière et à son prolongement grace à une représentation intégrale. On établit aussi quelques formules générales et on complète l'étude par celle d'un cas particulier.

Partie I : le polylogarithme

Dans toute cette partie, α est un réel fixé.

I-1.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière L_α définie par :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

I-1.2. Justifier que l'application L_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,\ 1[$.

I-1.3. Montrer que :

$$\forall x \in]-1,\ 1[,\ L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$

I-2.1. Pour tout $x \in]-1,\ 1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.
Exprimer $L_{\alpha+1}(x)$ sous forme de l'intégrale entre 0 et x d'une certaine fonction.

I-2.2. Pour $x \in]-1,\ 1[$, préciser les valeurs de $L_\alpha(x)$ lorsque $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$.

I-2.3. Dans cette question, on suppose que $\alpha \leq 1$.
Montrer que $L_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures. Pour cela, on pourra chercher à minorer $L_\alpha(x)$ pour $x \in]0,\ 1[$.

Partie II : prolongement pour $\alpha > 1$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement supérieur à 1.

II-1.1. Montrer que la fonction L_α définie en I-1.1 est continue sur $[-1,\ 1]$.

II-1.2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} L'_2(x)$ et préciser si la fonction L_2 est dérivable en 1.

II-2.1. Montrer que l'application $\varphi : u \longmapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - 1}$ est intégrable sur $]0,\ +\infty[$.

II-2.2. Pour tout réel $x \leq 1$, justifier l'existence de $K_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - x}\, du$.

II-2.3. Montrer que l'application K_α ainsi définie est continue sur l'intervalle $]-\infty,\ 1]$.

II-2.4. Dans cette question, on suppose que $\alpha > 2$.
Montrer que la fonction K_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-\infty,\ 1]$.

II-2.5. On revient au cas général où $\alpha > 1$.
Montrer que la fonction K_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a,\ b]$ avec $a < b < 1$, puis sur l'intervalle $]-\infty,\ 1[$.

II-3.1. Prouver l'existence de $G_\alpha = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ dt$ et justifier que $G_\alpha > 0$.

II-3.2. Montrer que pour tout $x \in [-1,\ 1]$ et pour tout $u > 0$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k\, \mathrm{e}^{-(k+1)u}.$$

II-3.3. En déduire que pour tout $x \in [-1,\ 1]$, en utilisant $L_\alpha(x)$ défini dans I-1.1 et $K_\alpha(x)$ défini dans II-2.2, on a la relation :

$$xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x).$$

On précisera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

II-4.1. Pour tout $x \in]-\infty,\ 1]$, on prolonge la définition de $L_\alpha(x)$ en posant :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - x}\, du.$$

Montrer que l'application L_α ainsi définie est continue sur $]-\infty,\ 1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,\ 1[$.

II-4.2. Montrer que pour tout réel $x \leq 1$, on a :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1 - xt}\, dt.$$

II-4.3. Justifier que l'on peut prolonger la fonction L_α sur $\mathbb{C}\backslash]1,\ +\infty[$ par la définition :

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash]1,\ +\infty[,\ L_\alpha(z) = \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z}\, du.$$

Montrer alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $z^2 \notin]1,\ +\infty[$, on a encore la relation :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2).$$

Partie III : le cas $\alpha = 2$

On s'intéresse ici, pour tou $x \in [-1,\ 1]$, à : $L_2(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

III-1.1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire, telle que :

$$\forall x \in]0,\ \pi],\ f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier $\ll b_n(f) \gg$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

III-1.2. Grâce à l'égalité de Parseval que l'on précisera, appliquée à f, en déduire la valeur de $L_2(1)$. Calculer aussi $L_2(-1)$.

III-2.1. Montrer que la fonction Φ définie par :

$$\forall x \in]0,\ 1[,\ \Phi(x) = L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\ 1[$.

III-2.2. Montrer que la fonction Φ est constante sur $]0,\ 1[$ et vaut $L_2(1)$.

III-2.3. En déduire la valeur de $L_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

III-2.4. Prouver aussi que :

$$\forall x \in \left[-1,\ \frac{1}{2}\right],\ L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2.$$

III-3. Grâce à II-3, calculer $K_2(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u - 1}\, du$.

III-4. Désormais, on s'intéresse au problème de L_2 considéré en II-4, vérifiant en particulier la relation vue en II-4.2 dont on partira pour traiter les questions suivantes, c'est-à-dire :

$$\forall x < 0,\ L_2(x) = -\frac{x}{G_2} \int_0^1 \frac{\ln(s)}{1 - xs}\, ds.$$

III-4.1. Montrer alors que pour tout $x < 0$, on a aussi les égalités :

$$L_2(x) = -\int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}\, dt = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt.$$

On pourra effectuer un changement de variable et une intégration par parties.

III-4.2. Pour tout $x < 0$, calculer $g(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1}\, dt$.

III-4.3. Justifier l'existence de l'intégrale $A = \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}\, dt$.

III-4.4. Préciser $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (L_2(x) - g(x))$. En déduire un équivalent simple de $L_2(x)$ quand x tend vers $-\infty$, cet équivalent dépendant de $\ln(-x)$.