CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP

2012

4 heures — Calculatrices autorisées

Notations

On note :

$C(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$C_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions bornées appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction f de $C_b(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$.

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit f une fonction complexe d'une variable réelle. Par définition, le support de f est l'adhérence de l'ensemble $A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. On dit que f est à support compact si son support est un compact de $\mathbb{R}$; en d'autres termes, f est à support compact si et seulement s'il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que f soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Par définition, une approximation de l'unité est une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est positive sur } \mathbb{R} \,; \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n = 1 \,; \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n = 0. \end{cases}$$

I Produit de convolution

Soit f, $g \in C(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g.

I.A – Généralités

I.A.1) Dans chacun des deux cas suivants, montrer que $f * g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et donner une majoration de $\|f * g\|_\infty$ pouvant faire intervenir $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

a) $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R})$;

b) f, $g \in L^2(\mathbb{R})$.

I.A.2) Soient f, $g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f * g(x)$ soit défini pour tout réel x. Montrer que $f * g = g * f$.

I.A.3) Montrer que si f et g sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact.

I.B – Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

Pour toute fonction h de $C(\mathbb{R})$ et tout réel α, on définit la fonction $T_\alpha(h)$ en posant $T_\alpha(h)(x) = h(x-\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans cette sous-partie I.B, on suppose que f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$.

I.B.1) Montrer qu'une fonction h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.

I.B.2) Pour tout réel α, montrer que $T_\alpha(f * g) = (T_\alpha(f)) * g$.

I.B.3) Pour tout réel α, montrer que $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leqslant \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$.

I.B.4) En déduire que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas où f est à support compact.

I.B.5) Montrer que $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ dans le cas général.

I.C – Continuité, dérivabilité, séries de Fourier

I.C.1) On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $f * g$ est continue.

b) Montrer que si g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

I.C.2) Soit k un entier naturel non nul. On suppose que g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k, sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f * g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et préciser sa fonction dérivée d'ordre k.

I.C.3) Dans cette **question I.C.3**, on suppose que g est continue, 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux.

a) Énoncer sans démonstration le théorème sur les séries de Fourier applicable aux fonctions continues, 2π-périodiques et de classe C^1 par morceaux.

b) Montrer que $f * g$ est 2π-périodique et est somme de sa série de Fourier. Expliciter les coefficients de Fourier de $f * g$ à l'aide des coefficients de Fourier de g et d'intégrales faisant intervenir f.

I.D – Approximation de l'unité

Soit $f \in C_b(\mathbb{R})$ et soit (δ_n) une suite de fonctions approximation de l'unité.

I.D.1) Montrer que la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Montrer que si f est à support compact, alors la suite $(f * \delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

I.D.3) Pour tout entier naturel n, on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$h_n(t) = \frac{\left(1 - t^2\right)^n}{\lambda_n}$$

et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1} \left(1 - t^2\right)^n \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

b) Montrer que si f est une fonction continue à support inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

c) En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass : toute fonction complexe continue sur un segment de $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

I.D.4) Existe-t-il une fonction $g \in C_b(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on ait $f * g = f$?

II Transformée de Fourier

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\hat{f}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt} \mathrm{d}t.$$

II.A – Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que $\hat{f}$ appartient à $C_b(\mathbb{R})$.

II.B – Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Soit f, $g \in L^1(\mathbb{R})$.

II.B.1) On suppose que g est bornée.

a) Montrer que $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\int_{\mathbb{R}} f * g$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} f$ et $\int_{\mathbb{R}} g$.

b) Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

II.B.2) Un contre-exemple

Montrer qu'il existe deux fonctions f et g dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g(0)$ ne soit pas défini.

II.C – ***Sinus cardinal***

On définit, pour tout entier naturel non nul n, la fonction k_n par

$$\begin{cases} k_n(x) = 1 - \dfrac{|x|}{n} & \text{si } |x| \leqslant n\,; \\ k_n(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

II.C.1) Exprimer la transformée de Fourier $\hat{k}_n(x)$ à l'aide de la fonction définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 & \text{si } x \neq 0\,; \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

II.C.2) Justifier que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

On admet que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = \pi$. On pose $K_n = \dfrac{1}{2\pi}\hat{k}_n$.

II.C.3) Montrer que la suite de fonctions $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est une approximation de l'unité.

II.D – ***Inversion de Fourier***

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} k_n(x)\hat{f}(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x.$$

II.D.1) Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, montrer que $I_n(t) = (f * K_n)(t)$.

II.D.2) En déduire, pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x.$$

III Convolution et codimension finie

Dans cette partie, on suppose que $g \in C_b(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la codimension dans $L^1(\mathbb{R})$ du sous-espace vectoriel

$$N_g = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid f * g = 0\}.$$

On note V_g l'espace vectoriel engendré par les fonctions $T_\alpha(g)$:

$$V_g = \mathrm{Vect}\,(T_\alpha(g))_{\alpha\in\mathbb{R}}$$

où, comme au **I.B**, on note $T_\alpha(g)$ la fonction $x \mapsto g(x-\alpha)$.

III.A – À toute fonction g de $C(\mathbb{R})$, on associe la forme linéaire φ_g sur $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(-t)\mathrm{d}t.$$

Soit $(g_1, \dots, g_p)$ une famille d'éléments de $C_b(\mathbb{R})$.

III.A.1) Montrer que la famille $(g_1, \dots, g_p)$ est libre si et seulement si la famille $(\varphi_{g_1}, \dots, \varphi_{g_p})$ est libre.

III.A.2) Soit E un espace vectoriel de dimension infinie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de formes linéaires sur E. On note

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f_n).$$

Montrer que la codimension de K dans E est égale au rang de la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace dual E^* (on commencera par le cas où ce rang est fini).

III.A.3) Montrer que la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$ est égale à la dimension de V_g.

III.A.4)

a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et soit g la fonction définie par $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$.

b) Soit n un entier naturel. Montrer qu'il existe une fonction g de $C_b(\mathbb{R})$ telle que N_g soit de codimension n dans $L^1(\mathbb{R})$.

III.B – Hypothèse A

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On dit que g vérifie l'hypothèse A si g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, bornée et dont les fonctions dérivées à tout ordre sont bornées sur $\mathbb{R}$.

III.B.1) Montrer que, si N_g est de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$ et si g vérifie l'hypothèse A, alors g est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

III.B.2) En déduire l'ensemble des fonctions g vérifiant l'hypothèse A et telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$.

III.C – Cas général

Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$. On suppose que N_g est de codimension finie n dans $L^1(\mathbb{R})$.

III.C.1) Montrer qu'il existe des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et des fonctions $m_1, \dots, m_n$ d'une variable réelle telles que, pour tout réel α,

$$T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g).$$

III.C.2) Soit F un sous-espace de dimension finie, notée p, de $C(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in C(\mathbb{R})$ et pour tout réel x, on note $e_x(f) = f(x)$.

a) Montrer qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_p$ tels que $(e_{a_1}, \dots, e_{a_p})$ soit une base de l'espace dual F^*.

b) Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille d'éléments de F, montrer que $\mathrm{Det}(f_i(a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ est non nul si et seulement si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F.

III.C.3) En appliquant la question **III.C.2**) à V_g, montrer que si g est de classe C^k alors les fonctions $m_1, \dots, m_n$ sont de classe C^k.

III.C.4) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, $V_{h_r * g}$ est de dimension finie (les fonctions h_r sont celles de la **question I.D.3**).

III.C.5) Montrer que pour r assez grand la dimension de $V_{h_r * g}$ est égale à celle de V_g.

III.C.6) En déduire que les fonctions $m_1, \dots, m_n$ sont de classe C^∞.

III.C.7) Déterminer l'ensemble des fonctions $g \in C_b(\mathbb{R})$ telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$.

• • • FIN • • •
