# CCP PSI 1

**calculatrices autorisées.**

## Notations.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.
Dans tout le problème, on note $n$ en entier naturel non nul et on désigne par $\mathbb{K}$ l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à $n$ lignes (respectivement des matices colonnes à $n$ lignes) à coefficients dans $\mathbb{K}$. La notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne $i$ et de la colonne $j$ de la matrice $A$. Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, on note $A^{-1}$ sa matrice inverse.
Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F$ un espace vectoriel de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. Une application $A : I \to F$ est continue (respectivement dérivable), lorsque pour $t$ décrivant $I$, les coefficients de la matrice $A(t)$ sont des fonctions continues (respectivement dérivables) de $I$ dans $\mathbb{K}$. On dira en abrégé que $A$ est une matrice continue (respectivement dérivable) sur $I$ et on notera $A(t) = (a_{i,j}(t))$ pour tout $t$ dans $I$. Lorsque cette matrice est dérivable, on note $A'(t) = (a'_{i,j}(t))$ la matrice dérivée.
Pour deux matrices dérivables $M(t)$ et $N(t)$ dont le produit existe, on admettra la formule $(MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)$.

## Equations différentielles matricielles.

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $A$ une matrice carrées d'ordre $n$ continue sur $I$ et $B$ une matrice colonne à $n$ lignes continues sur $I$, les coefficients des matrices $A$ et $B$ étant des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ où les solutions $X(t)$ sont des matrices colonnes à $n$ lignes dérivables sur $I$, dont les coefficients sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On note $(E_0)\ :\ X'(t) = A(t)X(t)$ l'équation différentielle homogène associée.
On dira que $(E)$ et $(E_0)$ sont des équations différentielles matricielles. On note $S_0$ l'ensemble des solutions de $(E_0)$. On rappelle que :

- $S_0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ ;
- les solutions de $(E)$ s'obtiennent en ajoutant à l'ensemble $S_0$ une solution particulière de $(E)$ ;
- pour tout $t_0$ de $I$ et pour toute matrice $V$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une solution et une seule $X$ de $(E)$ sur $I$ vérifiant $X(t_0) = V$ (existence et unicité de la solution sur $I$ du problème de Cauchy).

On appelle système fondamental de dolutions de $(E_0)$, toute base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $S_0$.
On note $W(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$ la matrice carrée d'ordre $n$ dont les $X_j(t)$ sont les colonnes et on dit que $W(t)$ est la matrice wronskienne de ce système fondamental de solutions de $(E_0)$.

## Objectifs.

Dans la première partie, il faut résoudre un exemple d'équation différentielle matricielle à coefficients constants.
Dans la deuxième partie, on traite le cas général de l'équation différentielle matricielle $(E)$ en définissant la matrice résolvante de $(E_0)$.
Dans la troisième partie, on utilise les résultats de la deuxième partie pour résoudre une équation différentielle scalaire du second ordre.

# 1 Cas d'une matrice à coefficients constants.

On considère les équations différentielles :

$$(E)\ :\ X'(t) = AX(t) + B(t) \ \text{ et } \ (E_0)\ :\ X'(t) = AX(t)$$

où $A$ désigne une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $I = \mathbb{R}$.

**1.1** Soient $V$ un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda$ un élément de $\mathbb{K}$. Montrer que la matrice $X(t) = e^{\lambda t}V$ est une solution de $(E_0)$ si et seulement si $V$ est vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$.

**1.2 Un exemple.**

On suppose $n = 4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \\ -te^t \end{pmatrix}$.

**1.2.1** On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère l'équation différentielle $(E_0)$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $A$. En déduire un système fondamental de solutions, puis la solution générale complexe de $(E_0)$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

**1.2.2** On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère l'équation différentielle $(E)\ :\ X'(t) = AX(t) + B(t)$.

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$.

Ecrire le système d'équations différentielles linéaires scalaires vérifié par les quatre fonctions $x_k(t)$.

Déterminer la solution générale réelle de $(E)$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ (on pourra déterminer successivement $x_2(t)$ puis $x_3(t)$ puis $x_1(t)$ puis $x_4(t)$).

Préciser la solution $X$ de $(E)$ telle que $X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

# 2 Matrice résolvante.

On reprend le cas général d'une équation différentielle $(E)\ :\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ définie dans la partie notations. On prendra $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $t \in I$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $S_0$ l'espace vectoriel de dimension $n$ des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $(E_0)$ associée.
Pour $t_0 \in I$ donné, on note $\Phi_{t_0}$ l'application de $S_0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall X \in S_0,\ \Phi_{t_0}(X) = X(t_0)$$

D'après le rappel sur le problème de Cauchy, l'aplication $\Phi_{t_0}$ est un isomorphisme de $S_0$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Soit $X_1, \dots, X_n$ un système fondamental de solutions de $(E_0)$.

**2.1** Soient $t_0$ et $t$ dans $I$. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et soit $X \in S_0$ la solution de $(E_0)$ telle que $X(t_0) = V$. Justifier l'égalité $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}(V) = X(t)$.

**2.2** On rapporte l'espace vectoriel $S_0$ à la base $(X_1, \dots, X_n)$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à sa base canonique $(C_1, \dots, C_n)$.

**2.2.1** Soit $t_0 \in I$. Prouver que la matrice, dans ce couple de bases, de l'application linéaire $\Phi_{t_0}$ de $S_0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice wronskienne

$$W(t_0) = (X_1(t_0), \dots, X_n(t_0))$$

**2.2.2** Soient $t_0$ et $t$ dans $I$. On note $R(t,t_0) = W(t)W(t_0)^{-1}$. Prouver que la matrice $R(t,t_0)$ ne dépend pas du système fondamental $(X_1,\dots,X_n)$ de solutions choisi.

**La matrice $R(t,t_0)$ s'appelle la résolvante de l'équation différentielle linéaire $(E_0)$.**

**2.3 Propriétés de la résolvante.**

Soient $t, t_0, t_1$ et $t_2$ dans $I$.

**2.3.1** Pour simplifier, on note $R'(t,t_0)$ la dérivée par rapport à $t$ de la matrice $R(t,t_0)$. Montrer que $R'(t,t_0) = A(t)R(t,t_0)$. En déduire que, pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, la matrice $X(t) = R(t,t_0)V$ est la solution de $(E_0)$ telle que $X(t_0) = V$.

**2.3.2** Montrer que $R(t_2,t_1)R(t_1,t_0) = R(t_2,t_0)$. En déduire que $R(t,t_0)^{-1} = R(t_0,t)$.

**2.4 Application de la résolvante : recherche d'une solution particulière de $(E)$.**

Soient $t$ et $t_0$ dans $I$. On cherche une solution particulière de $(E)$ sous la forme

$$X(t) = R(t,t_0)V(t)$$

où $V\ :\ I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application dérivable à déterminer.

**2.4.1** On suppose dans cette question et la suivante que $X(t) = R(t,t_0)V(t)$ est une solution de $(E)$. Montrer que

$$R(t,t_0)V'(t) = B(t)$$

**2.4.2** En déduire que $V(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0,u)B(u)\,du$.

**2.4.3** Montrer que $Y(t) = \int_{t_0}^{t} R(t,u)B(u)\,du$ est une solution particulière de $(E)$.

# 3 Une application de la résolvante

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

**3.1** On considère l'équation différentielle

$$(e_0)\ :\ t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 0$$

où $y = y(t)$ est une fonction deux fois dérivable définie sur un intervalle $I$.

**3.1.1** En cherchant les polynômes solutions de $(e_0)$ sous la forme $y(t) = a_m t^m + \cdots + a_0$ avec $a_m \neq 0$, déterminer le degré de ces polynômes puis déterminer tous les polynômes solutions de $(e_0)$ sur $\mathbb{R}$. Préciser le polynôme $P$ solution de $(e_0)$ et vérifiant $P(0) = 1$.

**3.1.2** Vérifier que la fonction $Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$ est solution de $(e_0)$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

**3.1.3** On cherche les solutions non nulles de $(e_0)$ développables en série entière : $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ pour $|t| < R$ où $R > 0$ est le rayon de convergence de la série.

**3.1.3.1** Pour tout entier naturel $k$, écrire, selon les valeurs de $k$, les relations entre $a_k$ et $a_{k+1}$. Déterminer le rayon de convergence $R$.

**3.1.3.2** Montrer qu'il existe un entier non nul $k_0$ à déterminer, tel que pour $k \geq k_0$, le coefficient $a_k$ s'exprime en fonction de $a_{k_0}$. Donner l'expression de $a_k$ en fonction de $a_{k_0}$. Comment retrouve-t-on les fonctions $P$ et $Q$ parmi ces solutions ?

**3.2** On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E})\ :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = \varphi(t)$$

où $a, b, \varphi$ sont des fonctions continues définies sur un intervalle $I$.

**3.2.1** On définit la fonction $z$ par $z(t) = y'(t)$ et on note $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice carrée $A(t)$ et une matrice colonne $B(t)$ telle que l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ s'écrive matriciellement sous la forme $(E)\ :\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

**3.2.2** On note $(f(t), g(t))$ une base de l'espace vectoriel des solutions sur $I$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)\ :\ y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Les matrices $\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ forment alors un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $(E_0)\ :\ X'(t) = A(t)X(t)$.

Soit $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{pmatrix}$ la matrice wronskienne de ce système fondamental de solutions.

Pour $t$ et $t_0$ dans $I$, on note en abrégé $f$ pour $f(t)$, $f_0$ pour $f(t_0)$, $g$ pour $g(t)$, $g_0$ pour $g(t_0)$, $f'$ pour $f'(t)$, $f'_0$ pour $f'(t_0)$, $g'$ pour $g'(t)$ et $g'_0$ pour $g'_0(t_0)$.

Exprimer les coefficients de la matrice $W(t_0)^{-1}$ en fonction de $f_0, g_0, f'_0, g'_0$ puis ceux de la matrice résolvante en fonction de $f, f_0, g, g_0, f', f'_0, g', g'_0$.

**3.3** On considère l'équation différentielle

$$(e)\ :\ t(t-1)y'' + 3y' - 6y = 20t^4$$

et on prend $I = ]0, 1[$.

**3.3.1** Ecrire l'équation différentielle $(e)$ sous la forme de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ de la question **3.2**.

En déduire les matrices $A(t)$ et $B(t)$ telles que l'équation différentielle $(e)$ s'écrive matriciellement sous la forme $(E)\ :\ X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

**3.3.2** On applique les résultats de la question **3.2** avec $f(t) = P(t)$ et $g(t) = Q(t)$, où $P$ et $Q$ sont les fonctions définies dans **3.1**. Pour $t$ et $u$ dans $]0, 1[$, expliciter le déterminant de $W(u)$ et la valeur de $Q(t)P(u) - P(t)Q(u)$.

**3.3.3** Soient $t$ et $t_0$ dans $]0, 1[$. En appliquant les résultats précédents de cette partie et de la partie **2**, montrer que la fonction

$$y(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^{t} (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4)\, du$$

est une solution particulière de $(e)$.

Montrer que cette solution est encore valable pour $t_0 = 0$.

Expliciter la solution générale de $(e)$ sur $[0, 1[$. Quelles sont les solutions de $(e)$ sur $[0, 1[$ qui vérifient $y(0) = y'(0) = 0$ ?