Centrale PSI 2
Un corrigé

1 Généralités.

I.A. Soit λ une valeur propre réelle de A et X un vecteur propre associé. $Y = X/\|X\|$ est encore vecteur propre associé à λ et

$$\lambda = \lambda(Y,Y) = (Y,AY) = {}^tYAY \in R(A)$$

I.B. Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On remarque que (la base étant orthonormée)

$$\forall i,j \in \{1,\dots,n\},\ {}^te_jAe_i = (e_j,Ae_i) = \left(e_j, \sum_{k=1}^n a_{k,i}e_k\right) = a_{j,i}$$

I.B.1) Les e_i sont des vecteurs normés et on a donc

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ a_{i,i} = {}^te_iAe_i \in R(A)$$

I.B.2) Avec la matrice A donnée, on a

$$\forall X = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXAX = 0$$

et donc $R(A) \subset \{0\}$ (et même égalité car on a vu que $0 \in R(A)$ à la question précédente). Cet exemple montre donc que les coefficients non diagonaux de A ne sont pas forcément dans $R(A)$.

I.C.1) X_1 et X_2 étant de norme 1, ils sont liés si et seulement si ils sont égaux ou opposés. Or, ${}^t(-X_1)A(-X_1) = {}^tX_1AX_1 = a \neq b$ et ainsi $X_2 \neq \pm X_1$. Finalement, la famille (X_1,X_2) est libre.

I.C.2) ϕ est bien définie sur tout $\mathbb{R}$ car X_λ n'est pas nul (car (X_1,X_2) est libre et l'un des scalaires λ ou $1-\lambda$ est non nul).
Les coefficients de X_λ dépendent continument de λ et les expressions au numérateur et au dénominateur de $\phi(\lambda)$ sont des produits, sommes et produits par des constantes de ces coefficients. Par théorèmes d'opérations, ϕ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

I.C.3) $\phi(0) = b$ et $\phi(1) = a$. Par théorème de valeurs intermédiaires appliqué à l'application continue ϕ sur l'intervalle $[0,1]$, tout élément de $[a,b]$ est image par ϕ d'un élément de $[0,1]$. Soit $c \in [a,b]$ et $\lambda \in [0,1]$ tel que $\phi(\lambda) = c$. On a alors $c = {}^tY_\lambda AY_\lambda$ avec $Y_\lambda = X_\lambda/\|X_\lambda\|$ et comme $\|Y_\lambda\| = 1$, $c \in R(A)$. Finalement

$$\forall a,b \in R(A),\ [a;b] \subset R(A)$$

ce qui signifie que $R(A)$ est convexe.

I.D. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors, les coefficients diagonaux de A ne peuvent être tous strictement négatifs ou tous strictement positifs. Il y en a donc un positif et un négatif ; notons les b et a. On a alors $0 \in [a,b] \subset R(A)$ et donc $0 \in R(A)$.

I.E. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ avec $\|X\| = 1$. On a alors $Y = QX$ qui est de norme 1 (car Q est orthogonale) et donc ${}^tYAY \in R(A)$ c'est à dire ${}^tX{}^tQAQX \in R(A)$. Ceci montre que $R({}^tQAQ) \subset R(A)$. L'inclusion réciproque s'obtient en reprenant le même argument avec Q^{-1} qui est aussi orthogonale. Ainsi,

$$\forall Q \in O_n(\mathbb{R}),\ R(A) = R({}^tQAQ)$$

I.F.1) On suppose (C_2) vérifiée avec la matrice Q. On a alors (questions I.B.1 et I.E)

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tQAQ) \in R({}^tQAQ) = R(A)$$

et la condition (C_1) est donc vérifiée.

I.F.2) Comme $x \in R(A)$, il existe $X_1 \in \mathbb{R}^n$ avec $\|X_1\| = 1$ tel que $x = {}^tX_1AX_1$. On sait que l'on peut compléter X_1 en $(X_1, \dots, X_n)$ formant une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$. Notons Q_1 la matrice dont les colonnes sont les X_i : Q_1 est la matrice de passage de la base canonique à la base $(X_1, \dots, X_n)$ et est orthogonale (car les bases sont orthonormées). Notons $A' = {}^tQ_1AQ_1 = Q_1^{-1}AQ_1$. D'après les calculs explicités en I.B, et comme $Q_1e_1 = X_1$, on a

$$a'_{1,1} = {}^te_1A'e_1 = {}^t(Q_1e_1)A(Q_1e_1){}^tX_1AX_1 = x$$

${}^tQ_1AQ_1$ a donc bien la forme voulue.

I.F.3) Si A est symétrique alors ${}^tQ_1AQ_1$ l'est aussi et donc B l'est.

I.F.4) Q_1 étant orthogonale, ${}^tQ_1 = Q_1^{-1}$. La trace étant un invariant de similitude, on a ainsi $\mathrm{Tr}({}^tQ_1AQ_1) = \mathrm{Tr}(A)$.

I.F.5) Montrons par récurrence que la propriété H_n : "si $A \in S_n(\mathbb{R})$ vérifie (C_1) alors A verifie C_2" est vraie pour tout $n \geq 1$.

- Initialisation : tout élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ vérifiant (C_1) et (C_2), H_1 est vraie de façon immédiate.
- Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que $H_1, \dots, H_{n-1}$ soient vraie. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant (C_1). Les questions précédentes appliquées avec $x = \mathrm{Tr}(A)$ (qui est dans $R(A)$ puisque A vérifie (C_1)) donnent des matrices Q_1, B, L, C. B est alors une matrice symétrique de trace nulle (puisque $x + \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}({}^tQ_1AQ_1) = \mathrm{Tr}(A) = x$). D'après la question I.D, $0 \in R(B)$ et B vérifie donc (C_1). Par l'hypothèse au rang $n-1$, il existe $Q'_2 \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que la diagonale de ${}^tQ'_2BQ'_2$ soit nulle. Posons $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q'_2 \end{pmatrix}$; $Q_2 \in O_n(\mathbb{R})$ $(Q_2{}^tQ_2 = I_n)$ et

$$ {}^tQ_2{}^tQ_1AQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tQ'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & L \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & LQ'_2 \\ {}^tQ'_2C & {}^tQ'_2BQ'_2 \end{pmatrix}$$

  Cette matrice a pour diagonale $(\mathrm{Tr}(A), 0, \dots, 0)$ et $Q_1Q_2 \in O_n(\mathbb{R})$ (car $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe). A vérifie donc (C_2) et H_n est prouvée.

2 Matrices symétyriques de format $(2, 2)$.

II.A. D'après I.A et I.C on sait déjà que $[\lambda_1, \lambda_2] \subset R(A)$.
On sait par théorème spectral qu'il existe une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = D$. D'après I.E on a $R(A) = R(D)$. Soit $a \in R(A) = R(D)$; il existe $X = (x_1, x_2)$ avec $x_1^2 + x_2^2 = 1$ tel que $a = {}^tXDX$ c'est à dire $a = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2$. On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) \leq a \leq \lambda_2(x_1^2 + x_2^2) = \lambda_2$ et donc $a \in [\lambda_1, \lambda_2]$.
On a ainsi prouvé par double inclusion que

$$R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$$

II.B. Il existe une b.o.n. (X_1, X_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $AX_i = \lambda_iX_i$. Un élément $X \in \mathbb{R}^2$ se décompose de manière unique sous la forme $a_1X_1 + a_2X_2$ et alors $(AX, X) = \lambda_1a_1^2 + \lambda_2a_2^2$. Dans le repère orthonormé $(O, (X_1, X_2))$, l'équation de Γ s'écrit $\lambda_1a_1^2 + \lambda_2a_2^2 = 1$.

II.B.1) En travaillant dans le repère précédent, on est amenés à distinguer quatre cas (qui couvrent tous les cas possibles)

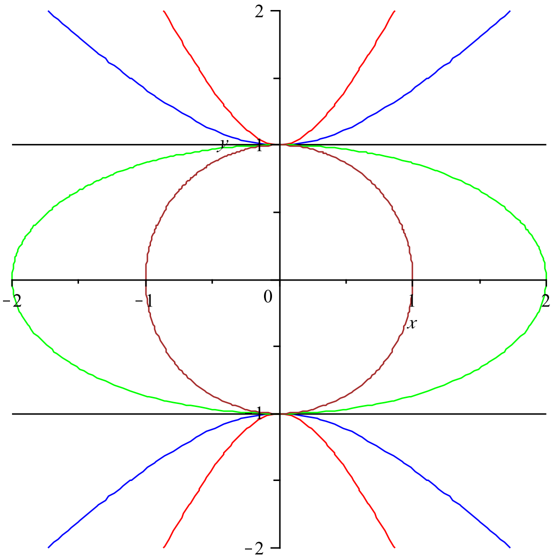
a) Si $\lambda_2 \leq 0$ alors $\Gamma = \emptyset$ (car alors $\lambda_1a_1^2 + \lambda_2a_2^2 \leq 0 < 1$).

b) Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$ alors Γ est la réunion des deux droites d'équation $a_2 = \pm 1/\sqrt{\lambda}$ (droites horizontales dans le repère choisi).

c) Si $\lambda_1 > 0$ (et ici $\lambda_2 > 0$), Γ est une ellipse (de centre O, d'axes $\mathrm{Vect}(X_1)$ et $\mathrm{Vect}(X_2)$ de demi-longueurs $1/\sqrt{\lambda_1}$ et $1/\sqrt{\lambda_2}$).

d) Si $\lambda_1 < 0$ (et ici $\lambda_2 > 0$), Γ est une hyperbole.

II.B.2) Le repère évoqué ci-dessus est le repère canonique. Comme $\lambda_2 > 0$, on n'obtient jamais l'ensemble vide.



II.C. Le théorème spectral donne l'existence d'une matrice orthogonale P telle que ${}^tPBP = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2) = D$. La question I.F.4 donne, en posant $A' = {}^tPAP$,

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}({}^tPABP) = \mathrm{Tr}({}^tPAP{}^tPBP) = \mathrm{Tr}(A'D)$$

Un calcul simple donne $\mathrm{Tr}(A'D) = \mu_1 a'_{1,1} + \mu_2 a'_{2,2}$. Par ailleurs, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$ (toujours I.F.4) indique que $a'_{1,1} - \lambda_1 = \lambda_2 - a'_{2,2}$. Finalement,

$$\mathrm{Tr}(AB) - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 = \mu_1(a'_{1,1} - \lambda_1) + \mu_2(a'_{2,2} - \lambda_2) = (\mu_1 - \mu_2)(a'_{1,1} - \lambda_1)$$

D'après I.B.1, $a'_{1,1} \in R(A')$. Or (I.E) $R(A') = R(A)$. Enfin (II.A) $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$. On a donc $a'_{1,1} - \lambda_1 \geq 0$. Comme $\mu_1 - \mu_2 \leq 0$ on a finalement

$$\mathrm{Tr}(AB) - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 \leq 0$$

II.D. On a ici $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$.

II.D.1) A étant diagonalisable (symétrique réelle) $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \geq 0$.

II.D.2) Le calcul de II.B donne ${}^tXAX = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 \geq 0$ (en gardant les notations de II.B).

II.D.3) I.B indique que $a, d \in R(A)$. Or $R(A) = [\lambda_1, \lambda_1] \subset \mathbb{R}^+$. Ainsi $a, d \geq 0$.

II.D.4) On travaille en deux temps.

- Si S est symétrique alors $\det(S) \geq 0$ (II.D.1) et $\mathrm{Tr}(S) \geq 0$ (II.D.3 montre que c'est la somme de deux termes ≥ 0).
- Supposons réciproquement que $\mathrm{Tr}(S), \det(S) \geq 0$. On a $P_S(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(S)X + \det(S)$ qui admet deux racines de même signe (car $\det(S) \geq 0$) et de somme positive (car $\mathrm{Tr}(S) \geq 0$). P_S admet donc deux racines positive et les valaures propres de S sont positives. Ainsi $S \geq 0$.

II.E. Avec la question précédente, on sait que A et B ont des trace et déterminant positifs.

II.E.1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les vecteurs proposés donne

$$b_1b_2 + \sqrt{\det(A)\det(B)} \leq \sqrt{b_1^2 + \det(A)}\sqrt{b_2^2 + \det(B)} = \sqrt{a_1d_1}\sqrt{a_2d_2} = \sqrt{a_1a_2d_1d_2}$$

II.E.2) Le calcul donne

$$\begin{aligned}\det(A+B) - \det(A) - \det(B) &= (a_1 + a_2)(d_1 + d_2) - (b_1 + b_2)^2 - (a_1d_1 - b_1)^2 - (a_2d_2 - b_2)^2 \\ &= a_1d_2 + a_2d_1 - 2b_1b_2\end{aligned}$$

La question précédente nous permet de minorer ce terme et on voit alors apparaître un carré :

$$\det(A+B) - \det(A) - \det(B) \geq (\sqrt{a_1d_2} - \sqrt{a_2d_1})^2 + 2\sqrt{\det(A)\det(B)} \geq 2\sqrt{\det(A)\det(B)}$$

II.F. On a cette fois $R(A), R(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$ (les valeurs propres sont positives et non nulles).

II.F.1) Supposons qu'il y ait égalité dans II.E.2. On doit alors avoir égalité à toutes les étapes et donc avoir $\sqrt{a_1d_2} - \sqrt{a_2d_1} = 0$ et l'égalité dans l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ce qui indique que les vecteurs $(b_1, \sqrt{\det(A)})$ et $(b_2, \sqrt{\det(B)})$ sont positivement liés (proportionnels avec un coefficient de proportionalité > 0, la non nullité provenant du caractère non nul de ces vecteurs qui découle de la non nullité des déterminants). $\sqrt{a_1d_2} - \sqrt{a_2d_1} = 0$ donne $a_1d_2 = a_2d_1$ (élévation au carré) et donc le caractère lié des vecteurs (a_1, d_1) et (a_2, d_2).
Réciproquement, supposons que $(b_1, \sqrt{\det(A)})$ et $(b_2, \sqrt{\det(B)})$ sont liés ainsi que (a_1, d_1) et (a_2, d_2). Alors $a_1d_2 = a_2d_1$ et comme $a_i, d_i \in R(A_i) \subset \mathbb{R}^{+*}$, on peut passer à la racine carrée pour obtenir $\sqrt{a_1d_2} - \sqrt{a_2d_1} = 0$. De plus, $(b_1, \sqrt{\det(A)})$ et $(b_2, \sqrt{\det(B)})$ sont positivement liés car $\det(A)$ et $\det(B)$ sont > 0. Ona donc égalité dans II.E.1. Finalement, on a égalité dans II.E.2.

II.F.2) S'il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda B$ alors $(a_1, d_1) = \lambda(a_2, d_2)$ et $(b_1, \sqrt{\det(A)}) = \lambda(b_2, \sqrt{\det(B)})$. On a ainsi égalité dans II.E.2.
Réciproquement, si on a égalité dans II.E.2 on a vu qu'il existait $\lambda > 0$ tel que $(b_1, \sqrt{\det(A)}) = \lambda(b_2, \sqrt{\det(B)})$. Ainsi, $b_1 = \lambda b_2$ mais aussi $\sqrt{a_1d_1 - b_1^2} = \lambda\sqrt{a_2d_2 - b_2^2}$ ce qui donne (en élevant au carré) $a_1d_1 = \lambda^2 a_2d_2$. Or, il existe μ tel que $(a_1, d_1) = \mu(a_2, d_2)$ et on a alors $\mu^2 = \lambda^2$. Comme les a_1, d_i sont > 0, on a $\mu = \lambda$ et finalement $A = \lambda B$.

II.G. On remarque que si M est symétrique alors $M \geq 0$ équivaut à $R(M) \subset \mathbb{R}^+$ (question II.A). On a trois propriétés à vérifier.
- Soit $A \in S^2(\mathbb{R})$. $A - A = 0$ est symétrique à valeurs propres positive et donc $A \leq A$. La relation $\leq$ est réflexive.
- Soient $A, B, C \in S_2(\mathbb{R})$. Si $A \leq B$ et $B \leq C$ alors $B - A$ et $C - B$ sont positives et donc $R(B - A)$ et $R(C - B)$ sont inclus dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout X tel que $\|X\| = 1$, $((C - A)X|X) = ((C - B)X|X) + ((B - A)X|X) \in R(B - A) + R(C - B) \subset \mathbb{R}^+$. Ainsi $C - A$ est positive et $A \leq C$. La relation $\leq$ est transitive.
- Soient $A, B \in S_2(\mathbb{R})$. Si $A \leq B$ et $B \leq A$ alors $R(A - B)$ et $R(B - A)$ sont inclus dans $\mathbb{R}^+$. Or, les éléments de ces deux ensembles sont opposés et donc $R(A - B) = R(B - A) = \{0\}$. Ainsi $A = B$. La relation $\leq$ est antisymétrique.

II.H.1) Pour tout vecteur X et tout entier n, ${}^tXA_{n+1}X - {}^tXA_nX = {}^tX(A_{n+1} - A_n)X$. Mais $A_{n+1} - A_n \geq 0$ donne $R(A_{n+1} - A_n) \subset \mathbb{R}^+$. En divisant par $\|X\|^2 > 0$ quand $X \neq 0$ (pour se ramener à un vecteur normé) on obtient donc ${}^tXA_{n+1}X - {}^tXA_nX \geq 0$ et ceci reste vrai si $X = 0$. La suite $({}^tXA_nX)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
Par ailleurs, la suite (A_n) est majorée et il existe S telle que $\forall n,\ A_n \leq S$. Le même raisonnement monre que pour tput X et tout n, ${}^tXA_nX \leq {}^tXSX$ et la suite $({}^tXA_nX)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.

II.H.2) En notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a $a_n = {}^te_1Ae_1$ et $d_n = {}^te_2Ae_2$. D'après la question précédente, (a_n) et (d_n) sont croissantes et majorées. Par théorème de limite monotone dans $\mathbb{R}$, ces suites convergent.

II.H.3) Pour $X = (1, 1)$, on a ${}^tXA_nX = a_n + d_n + 2b_n$. Ainsi, $b_n = \frac{1}{2}\left({}^tXA_nX - a_n - d_n\right)$ est le terme général d'une suite convergente (c'est le cas de (a_n), (d_n) et $({}^tXA_nX)$ qui sont croissantes majorées). Finalement (A_n) converge puisque c'est le cas des quatre suites coordonnées.

3 Matrices symétriques définies positives.

Dans toute cette partie, on utilise une généralisation de II.A : une matrice symétrique A est positive si et seulement si $R(A) \subset \mathbb{R}^+$ (ou encore $\forall X \neq 0,\ {}^tXAX \geq 0$) et de même elle est définie positive si et seulement si $R(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$ (ou encore $\forall X \neq 0,\ {}^tXAX > 0$).

III.A. Par théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Et comme A est à valeurs propres > 0, les coefficients diagonaux d_i de D sont > 0 (ce sont les valeurs propres de A). On peut donc noter $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$ de sorte que $\Delta^2 = D$. On a alors $A = PDP^{-1} = P\Delta^{2t}P = {}^tYY$ avec $Y = \Delta^tP$. Y est inversible comme produit de matrices inversible (P car elle est orthogonale, Δ car diagonale à coefficients diagonaux non nuls).

III.B. Posons $Z = Y^{-1}$ avec Z comme ci-dessus. On a alors ${}^tZAZ = I_n$. De plus, ${}^tZBZ$ est symétrique donc il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1t}ZBZP = D$ diagonale. Comme P est orthogonale, $P^{-1} = {}^tP$. Posons $T = ZP$: c'est une matrice inversible telle que ${}^tTBT = D$ et on a ${}^tTAT = {}^tPI_nP = I_n$.

III.C.1) B est symétrique définie positive. Il existe donc une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\forall i,\ \mu_i > 0$. On a alors $Q^{-1}(I_n+B)Q = \mathrm{diag}(1+\mu_1, \dots, 1+\mu_n)$. Le déterminant étant un invariant se similitude, $\det(I_n+B) = \prod_{i=1}^n(1+\mu_i)$. Quand on développe ce produit, on obtient 2^n termes positifs dont 1 et $\mu_1 \dots, \mu_n$. On a donc

$$\det(I_n + N) \geq 1 + \prod_{i=1}^n \mu_i = 1 + \det(B)$$

Remarque : B positive suffit pour conclure.

III.C.2) On utilise une matrice inversible T comme en III.B pour obtenir

$$\det(A+B) = \frac{1}{\det(T)^2}\det({}^tTAT + {}^tTBT) = \frac{1}{\det(T)^2}\det(I_n + {}^tTBT)$$

La question précédente s'applique car $B' = {}^tTBT$ est symétrique (immédiat) et définie positive (si $B'X = \lambda X$ avec $X \neq 0$ alors $\lambda\|X\|^2 = {}^tXB'X = {}^t(TX)B(TX) \geq 0$ car $TX \neq 0$, T étant inversible, et $R(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et les valeurs propres de B sont donc > 0). On en déduit que

$$\det(A+B) \geq \frac{1}{\det(T)^2}\left(1 + \det({}^tTBT)\right) = \frac{1}{\det(T)^2} + \det(B)$$

Enfin, par choix de T, $\det(T)^2\det(A) = 1$ et donc

$$\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$$

Remarque : B positive suffit là encore pour conclure.

III.D. Soit $g\ :\ x \mapsto x^\beta - \beta x$; g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0,\ g'(x) = \beta(x^{\beta-1} - 1$. g est donc croissante sur $]0,1]$ puis décroissante ensuite (car $\beta - 1 < 0$). Elle atteint son maximum en 1 où elle vaut $1 - \beta$. On a ainsi

$$\forall x > 0,\ x^\beta - \beta x \leq 1 - \beta$$

III.E. Posons $x = \det(A)$ et $y = \det(B)$. Ce sont des réels > 0 (car A et B sont définies positives) et donc $(\beta - 1)\frac{y}{x} \leq 0 \leq \beta$. On en déduit que $\beta\frac{y}{x} - \beta \leq \frac{y}{x}$ c'est à dire que $\beta\frac{y}{x} + 1 - \beta \leq \frac{y}{x} + 1$. Avec la question précédente, on en déduit que

$$\left(\frac{y}{x}\right)^\beta \leq 1 + \frac{y}{x}$$

Comme $\alpha = 1 - \beta$, ceci s'écrit aussi (en multipliant par x) $y^\beta x^\alpha \leq x + y$ et on a donc

$$(\det(A))^\alpha(\det(B))^\beta \leq \det(A) + \det(B)$$

III.F. On prouve le résultat par récurrence sur k.

- Initialisation : le résultat est immédiat au rang 1 et on vient de le prouver au rang 2.
- Hérédité : soit $k \geq 3$ tel que le résultat soit vrai aux rangs $1, \dots, k-1$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des réels > 0 de somme égale à 1. Soient $A_1, \dots, A_k$ des matrices symétriques définies positives. $\alpha_k \neq 1$ car sinon $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} = 0$. On écrit alors que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i = (1 - \alpha_k)B + \alpha_k A_k \quad \text{avec} \quad B = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} A_i$$

B est symétrique comme somme de matrices symétriques et définie positive (pour tout X non nul, on vérifie que ${}^tXBX > 0$ et donc que $R(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$). On peut appliquer le résultat au rang 2 pour obtenir

$$\det\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i\right) \geq (\det(B))^{1-\alpha_k} \det(A_k)^{\alpha_k}$$

Par ailleurs, les coefficients $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k}$ sont > 0 de somme égale à 1. L'hypothèse de récurrence au rang $k-1$ donne

$$\det(B) \geq \prod_{i=1}^{k-1} (\det(A_i))^{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_k}}$$

La combinaison des deux ingéalités donne le résultat voulu, c'est à dire le résultat au rang k.