CENTRALE - SUPÉLEC 2011
PSI, épreuve MATH 2

Représentation connaissant les distances mutuelles

I. Centrage de matrices

I.A. On a $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & : \cdots & 1 \end{pmatrix}$, et $J^2 = nJ$, on en déduit que

$$P^2 = \left(I_n - \frac{1}{n}J\right)^2 = I_n - \frac{2}{n}\,J + \frac{1}{n^2}\,J^2 = I_n - \frac{1}{n}\,J = P\ ,$$

donc π est un projecteur. Il est autoadjoint (car représenté par une matrice symétrique dans une base orthonormale), c'est donc un projecteur orthogonal. On a $PX = X \iff JX = 0$, donc $\operatorname{Im}\pi = \operatorname{Ker} J$ est l'hyperplan $\mathcal{H}$ d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$, et $\operatorname{Ker}\pi = \mathcal{H}^\perp = \operatorname{Vect}(Z)$.

Rappel: Un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est autoadjoint.

I.B.1) • Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\Phi^2(M) = P^2MP^2 = PMP = \Phi(M)$, donc $\Phi^2 = \Phi$: l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un projecteur.

• Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\big(\Phi(M)|N\big) = (PMP|N) = \operatorname{tr}({}^tP\,{}^tM\,{}^tPN) = \operatorname{tr}(P\ {}^tMPN) = \operatorname{tr}({}^tMPN\ P) = (M|PNP) = \big(M|\Phi(N)\big)\ ,$$

donc Φ est un endomorphisme symétrique (autoadjoint) de l'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc Φ est un projecteur orthogonal.

I.B.2) • Si $M \in \operatorname{Im}\Phi$, alors $M = \Phi(M) = PMP$ (*l'image d'un projecteur est aussi l'ensemble de ses vecteurs invariants*), donc $MZ = PMPZ = 0$ puisque $Z \in \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker}\pi$. De même, ${}^tMZ = P\,{}^tMPZ = 0$. On a donc l'inclusion

$$\operatorname{Im}\Phi \subset \big\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MZ = {}^tMZ = 0\big\}\ .$$

• Inversement, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $MZ = {}^tMZ = 0$.

Alors $\operatorname{Im}(P - I) = \operatorname{Ker} P = \operatorname{Vect}(Z) \subset \operatorname{Ker} M$ par hypothèse, donc $M(P - I) = 0$, soit $MP = M$.

On a aussi $\operatorname{Im}(P - I) = \operatorname{Vect}(Z) \subset \operatorname{Ker}\,{}^tM$, donc ${}^tMP = {}^tM$ et, en transposant, $PM = M$.

Des deux identités ci-dessus, on tire $PMP = M$, autrement dit $\Phi(M) = M$ donc $M \in \operatorname{Im}\Phi$, ce qui prouve l'inclusion inverse.

• Approfondissons un peu l'étude de Φ, cela me sera utile pour la suite : on vient de montrer que $\operatorname{Im}\Phi$ est constitué des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont telles que, sur chaque ligne et sur chaque colonne, la somme des coefficients est nulle, autrement dit

$$\operatorname{Im}\Phi = \Big(\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} l_i\Big)\ \cap\ \Big(\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} c_j\Big)\ ,$$

en notant l_i la forme linéaire $M \mapsto \sum_{j=1}^n m_{ij}$ (somme des coefficients de la i-ème ligne) et $c_j : M \mapsto \sum_{i=1}^n m_{ij}$ (somme des coefficients de la j-ème colonne). Les formes linéaires ci-dessus sont liées par la relation évidente $\sum_{i=1}^n l_i = \sum_{j=1}^n c_j$ ($\mapsto$ somme de tous les coefficients de la matrice), mais on vérifie facilement que la famille $(l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_{n-1})$ est libre, on en déduit que

$$\operatorname{rg}\Phi = \dim \operatorname{Im}\Phi = n^2 - \operatorname{rg}(l_1, \cdots, l_n, c_1, \cdots, c_n) = n^2 - (2n-1) = (n-1)^2 \ .$$

Donc $\operatorname{Ker}\Phi$ est de dimension $2n-1$, on peut vérifier que $\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Vect}(L_1, \cdots, L_n, C_1, \cdots, C_{n-1})$ avec

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad , \cdots , \quad L_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

et je laisse le lecteur imaginer des matrices C_j analogues avec une colonne de 1 et les autres de 0. *Pour justifier cela, on peut, soit vérifier que ces matrices sont linéairement indépendantes et que chacune d'elles vérifie* $PMP = 0$ *et conclure par un argument de dimension, soit utiliser* $\operatorname{Ker}\Phi = (\operatorname{Im}\Phi)^{\perp}$ *puisqu'il est immédiat que* $\operatorname{Vect}(L_i) = (\operatorname{Ker} l_i)^{\perp}$ *et* $\operatorname{Vect}(C_j) = (\operatorname{Ker} c_j)^{\perp}$.

I.C. On a $\Phi(M) = PMP = M - \dfrac{1}{n}(MJ + JM) + \dfrac{1}{n^2} JMJ$. Or, $MJ = MZ\,{}^tZ = S(M)\,{}^tZ$, donc, les deux matrices étant symétriques, $JM = {}^t(MJ) = Z\ {}^tS(M)$, puis $JMJ = Z\,{}^tZMZ\,{}^tZ = ({}^tZMZ)Z\,{}^tZ$ (on peut ainsi permuter car ${}^tZMZ$ est un scalaire) ; plus précisément, ${}^tZMZ = < Z, MZ > = \sigma(M)$. Au final, on obtient bien la relation

$$\Phi(M) = M - \frac{1}{n}\big(S(M)\ {}^tZ + Z\ {}^tS(M)\big) + \frac{\sigma(M)}{n^2}\, J \ .$$

II. Produit scalaire à partir des distances mutuelles (relation de Torgerson)

II.A. La matrice M étant symétrique, on peut calculer $\Phi(M)$ à l'aide de la relation obtenue en **I.C.** Notons que

$$S(M)\ {}^tZ = \begin{pmatrix} S(M)_1 \\ \vdots \\ S(M)_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(M)_1 & \cdots & S(M)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ S(M)_n & \cdots & S(M)_n \end{pmatrix} \ ,$$

autrement dit $\big(S(M)\ {}^tZ\big)_{i,j} = S(M)_i$. De même, $\big(Z\ {}^tS(M)\big)_{i,j} = S(M)_j$. Précisons :

$$\begin{aligned} S(M)_i &= \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \big(\|U_i\|^2 + \|U_j\|^2 - 2 < U_i, U_j > \big) \\ &= n\,\|U_i\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|U_k\|^2 - 2\Big\langle U_i, \sum_{j=1}^{n} U_j \Big\rangle \\ &= n\,\|U_i\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \|U_k\|^2 \ , \end{aligned}$$

en utilisant le fait que les U_i sont centrés. On en déduit que

$$\sigma(M) = \sum_{i=1}^{n} S(M)_i = 2n \sum_{k=1}^{n} \|U_k\|^2 \ .$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\big(\Phi(M)\big)_{i,j} &= m_{ij} - \frac{1}{n}\big(S(M)_i + S(M)_j\big) + \frac{\sigma(M)}{n^2} \qquad\qquad \textbf{(*)} \\
&= m_{ij} - \|U_i\|^2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|U_k\|^2 - \|U_j\|^2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\|U_k\|^2 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\|U_k\|^2 \\
&= \|U_i - U_j\|^2 - \|U_i\|^2 - \|U_j\|^2 \\
&= -2 < U_i, U_j > \ .
\end{aligned}$$

Or, si on pose $U_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_{kj} e_k$ avec $(e_1, \cdots, e_p)$ base canonique de $\mathbb{R}^p$ (les u_{ij} sont les coefficients de la matrice $U \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$), on a

$$\big({}^tUU\big)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} u_{ki}u_{kj} = < U_i, U_j > \ .$$

On a donc prouvé la relation $\Phi(M) = -2\ {}^tUU$.

II.B. Il suffit de relire la question précédente (relation **(*)**), on obtient les coefficients de la matrice “de Gram”

$$< U_i, U_j > = {}^tU_iU_j = \big({}^tUU\big)_{i,j} = -\frac{1}{2}\big(\Phi(M)\big)_{i,j} = -\frac{1}{2}(m_{ij} + \alpha_{ij}) \ .$$

III. Condition pour qu’une matrice de Gram soit une matrice de distances mutuelles au carré

III.A.1) • Pour toute matrice M symétrique, $\Phi(M) = PMP$ est aussi symétrique réelle, donc ses valeurs propres sont toutes réelles.

• Supposons d’abord les U_i centrés, i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$; dans ce cas, on a $\Phi(M) = -2\,{}^tUU$ d’après **II.A.**, donc si λ est une valeur propre de $\Phi(M)$ et $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé, on a $-2\,{}^tUUX = \lambda X$, puis $-2\,{}^tX\,{}^tUUX = \lambda\,{}^tXX$, soit $\lambda = -2\,\dfrac{\|UX\|^2}{\|X\|^2} \le 0$.

• Si les U_i sont quelconques, soit $G = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$ leur isobarycentre, posons $V_i = U_i - G$ pour tout i, alors les V_i sont centrés : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V_i = 0$. Comme on a $m_{ij} = \|U_i - U_j\|^2 = \|V_i - V_j\|^2$, la question **II.A.** montre que $\Phi(M) = -2\,{}^tVV$, avec $V = (V_1|V_2|\cdots|V_n) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, et on retrouve comme ci-dessus que ses valeurs propres sont négatives ou nulles.

III.A.2) On a $\operatorname{rg}\big(\Phi(M)\big) = \operatorname{rg}({}^tUU) = \operatorname{rg}(U)$, c'est classique : en effet, en identifiant matrices et applications linéaires canoniquement associées, on a $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, ${}^tUU \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et ces deux applications linéaires ont le même noyau puisque $\operatorname{Ker} U \subset \operatorname{Ker}({}^tUU)$ de façon évidente et ${}^tUUX = 0 \Longrightarrow \|UX\|^2 = {}^tX\,{}^tUUX = 0$, elles ont donc le même rang par le théorème du rang. Comme $U \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{rg}(U) \leq \min\{n, p\}$, donc $p \geq \operatorname{rg}\big(\Phi(M)\big)$.

III.B.1) Je vais utiliser l'indication donnée... à la question **V.A.2.b)**!!!

La matrice $\Psi(M)$ est symétrique réelle, à valeurs propres positives ou nulles. D'après le théorème spectral, on peut écrire $\Psi(M) = QD\,{}^tQ$, avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, les λ_i étant les valeurs propres strictement positives (comptées avec leur multiplicité) de $\Psi(M)$. En posant $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_r}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, on a $D = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = {}^tEE$, avec $E = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$. En posant enfin $U = E\,{}^tQ$, on a $U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, et $\Psi(M) = {}^tUU$.

III.B.2.a) Il s'agit de montrer que $UZ = 0$, soit encore que $\|UZ\|^2 = 0$, c'est-à-dire que ${}^tZ\,{}^tUUZ = 0$. Or,

$$ {}^tZ\,{}^tUUZ = -\frac{1}{2}\,{}^tZ\,\Phi(M)\,Z = -\frac{1}{2}\,{}^tZPMPZ = 0 $$

puisque $Z \in \operatorname{Ker} P$. Donc les U_i sont centrés.

b) D'après **II.A.**, on a ${}^tUU = \Psi(N)$, donc $\Psi(N) = \Psi(M)$.

c) On vient de montrer que $N - M \in \operatorname{Ker}\Psi = \operatorname{Ker}\Phi$ donc, d'après les remarques faites à la fin de la question **I.B.2)**, on a $N - M \in \operatorname{Vect}(L_1, \cdots, L_n, C_1, \cdots, C_{n-1})$, autrement dit la matrice $N - M$ est de la forme

$$ N - M = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_{n-1} & a_1 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_{n-1} & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. $$

Mais la matrice $N - M$ est aussi symétrique, à coefficients diagonaux nuls, on en déduit facilement (*détails laissés au lecteur*) qu'elle est nulle. Donc $M = N$.

En conclusion, les "matrices de distances mutuelles au carré" sont exactement les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont symétriques, à coefficients diagonaux nuls, et telles que les valeurs propres de $\Phi(M)$ sont négatives ou nulles. *Il faut croire que cela entraîne la positivité des coefficients de M, puisque cette condition n'a pas été utilisée pour traiter la réciproque.*

IV. Étude d'un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$

IV.A. Étude géométrique

Notons d'abord que les conditions $AB = BC = CD = DA = x$ entraînent l'orthogonalité des diagonales, soit $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. En effet, en utilisant l'identité de polarisation

$$ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) $$

pour exprimer les produits scalaires, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}\\ &= \frac{1}{2}\,(AD^2-AB^2-BD^2)-\frac{1}{2}\,(CD^2-CB^2-BD^2)\\ &= \frac{1}{2}\,(x^2-x^2-BD^2)-\frac{1}{2}\,(x^2-x^2-BD^2)\ =\ 0\ .\end{aligned}$$

IV.A.1) Si A, B, C, D sont coplanaires, alors le quadrilatère $ABCD$ est un losange, ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent perpendiculairement (*cf.* ci-dessus) et en leur milieu commun I (car c'est un parallélogramme particulier, ou bien cela peut être vu comme conséquence de la question **IV.A.2.a** qui suit). De Pythagore dans le triangle rectangle AIB par exemple, on déduit la relation $1=AB^2=AI^2+IB^2$, soit $a^2+b^2=4$.

IV.A.2.a) La droite (IJ) coupe (AB) en I et (CD) en J, et

$$\begin{aligned}2\,\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\cdot\overrightarrow{AC}\ =\ -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}\\ &= -\frac{1}{2}(BC^2-BA^2-AC^2)+\frac{1}{2}(AD^2-AC^2-CD^2)\ =\ 0\ ,\end{aligned}$$

donc (IJ) est la perpendiculaire commune aux deux droites non coplanaires (AC) et (BD).

b) Notons B' et D' les projetés orthogonaux de B et D respectivement sur le plan affine $\mathcal{P}$ contenant (AC) et parallèle à (BD), c'est-à-dire perpendiculaire à (IJ). *Faire un dessin!* La droite $(B'D')$, parallèle à (BD) dans le plan $\mathcal{P}$, est donc perpendiculaire à (AC) : le quadrilatère plan $AB'CD'$ est un losange dans le plan $\mathcal{P}$ puisque ses diagonales $[AC]$ et $[B'D']$ se coupent perpendiculairement en leur milieu I (projeté de J), notons l la longueur commune de ses côtés. Alors $l<1$ puisque $1=AB^2=l^2+BB'^2>l^2$ (Pythagore). De nouveau par Pythagore, on a $IA^2+IB'^2=AB'^2$, soit $\dfrac{a^2+b^2}{4}=l^2<1$, donc $a^2+b^2<4$.

IV.A.3) Pour construire géométriquement un quadrilatère gauche satisfaisant aux conditions de distances mutuelles imposées, on "remonte" le raisonnement ci-dessus, i.e. on construit d'abord dans l'espace $\mathbb{R}^3$ deux segments $[AC]$ et $[B'D']$ se coupant perpendiculairement en leur milieu commun I et de longueurs respectives a et b, alors $AB'CD'$ est un losange dans un certain plan affine $\mathcal{P}$. Notons l la longueur commune des côtés, par Pythagore on a $a^2+b^2=4l^2$, donc $0<l\leq 1$ vu l'hypothèse $a^2+b^2\leq 4$. On place ensuite un point B sur la normale à $\mathcal{P}$ issue de B' de façon que $BB'=\sqrt{1-l^2}$, et un point D défini par $\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{BB'}$. On a alors $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}$, donc $BD=b$. On a bien $AC=a$ et, par Pythagore de nouveau $AB^2=AB'^2+B'B^2=l^2+(1-l^2)=1$ et, de même, $BC=CD=DA=1$.

IV.B. Étude algébrique

IV.B.1) $M=\begin{pmatrix}0&1&a^2&1\\1&0&1&b^2\\a^2&1&0&1\\1&b^2&1&0\end{pmatrix}$, puis $S(M)=\begin{pmatrix}a^2+2\\b^2+2\\a^2+2\\b^2+2\end{pmatrix}$ et $\sigma(M)=2a^2+2b^2+8$.

IV.B.2) On calcule!!!

$$\Psi(M)=-\frac{1}{2}\Phi(M)=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}4+3a^2-b^2&-4+a^2+b^2&4-5a^2-b^2&-4+a^2+b^2\\-4+a^2+b^2&4-a^2+3b^2&-4+a^2+b^2&4-a^2-5b^2\\4-5a^2-b^2&-4+a^2+b^2&4+3a^2-b^2&-4+a^2+b^2\\-4+a^2+b^2&4-a^2-5b^2&-4+a^2+b^2&4-a^2+3b^2\end{pmatrix}.$$

En posant $X=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $Z=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, le lecteur se fera un plaisir de vérifier les égalités

$$\Psi(M)\,X=\frac{a^2}{2}\,X\quad;\quad\Psi(M)\,Y=\frac{b^2}{2}\,Y\quad;\quad\Psi(M)\,W=\Big(1-\frac{a^2+b^2}{4}\Big)\,W\quad;\quad\Psi(M)\,Z=0$$

(la dernière de ces relations étant déjà connue puisqu'on sait que toute matrice appartenant à $\operatorname{Im}\Psi=\operatorname{Im}\Phi$ possède le vecteur Z dans son noyau). Ces quatre vecteurs, qui sont linéairement indépendants car deux à deux orthogonaux, forment donc une base (orthogonale) de vecteurs propres de la matrice $\Psi(M)$, et

$$\operatorname{Sp}\big(\Psi(M)\big)=\Big\{\frac{a^2}{2}\ ,\ \frac{b^2}{2}\ ,\ 1-\frac{a^2+b^2}{4}\ ,\ 0\Big\}$$

(les quatre valeurs n'étant pas nécessairement distinctes).

IV.B.3) Comme $a>0$ et $b>0$, on a $\operatorname{rg}\big(\Psi(M)\big)=\begin{cases}2 & \text{si}\quad a^2+b^2=4\\ 3 & \text{sinon}\end{cases}$.

IV.B.4) Si les points sont coplanaires, on peut toujours les supposer centrés, alors $\operatorname{rg}\big(\Psi(M)\big)=\operatorname{rg}({}^tUU)=\operatorname{rg}(U)=2$, donc $a^2+b^2=4$.

IV.B.5) D'après la partie **III**, les valeurs propres de la matrice $\Psi(M)$ sont positives ou nulles, ce qui entraîne $a^2+b^2\leq 4$.

IV.B.6) Reprenons la construction de U décrite à la question **III.B.1)**. On a $\Psi(M)=QD\,{}^tQ$, avec une matrice de passage Q orthogonale que l'on obtient en normant les vecteurs-colonnes X, Y, W, Z, soit

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad,\quad\text{et}\quad D=\begin{pmatrix}\frac{a^2}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{b^2}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4-a^2-b^2}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

En posant $r=\sqrt{4-a^2-b^2}$ puis $\Delta=\operatorname{diag}\Big(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}},\frac{r}{2}\Big)\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $U=(\,\Delta\quad 0\,)\ {}^tQ=(U_1|U_2|U_3|U_4)\in\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ nous fournit quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions recherchées. On explicite :

$$U_1=\begin{pmatrix}\frac{a}{2}\\0\\-\frac{r}{4}\end{pmatrix}\quad,\quad U_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{b}{2}\\\frac{r}{4}\end{pmatrix}\quad,\quad U_3=\begin{pmatrix}-\frac{a}{2}\\0\\-\frac{r}{4}\end{pmatrix}\quad,\quad U_4=\begin{pmatrix}0\\-\frac{b}{2}\\\frac{r}{4}\end{pmatrix}.$$

V. Cas où il n'existe pas de points représentant une matrice de distances mutuelles

V.A. Par les moindres carrés

V.A.1.a) On a

$$\begin{aligned} \|{}^tQAQ\|^2_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} &= \operatorname{tr}({}^tQ\,{}^tAQ\,{}^tQAQ) \;=\; \operatorname{tr}({}^tQ\;{}^tAAQ) \\ &= \operatorname{tr}({}^tAAQ\;{}^tQ) \;=\; \operatorname{tr}({}^tAA) \;=\; \|A\|^2_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\,. \end{aligned}$$

b) La matrice $\Psi(M)$ est symétrique réelle lorsque M est symétrique ; d'après le théorème spectral, il existe donc $Q_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ_0\,\Psi(M)\,Q_0$ soit diagonale.

c) Posons $D = {}^tQ_0\,\Psi(M)\,Q_0 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Alors pour tout $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|\Psi(M) - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \|Q_0D\,{}^tQ_0 - T\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \|D - {}^tQ_0TQ_0\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

et, lorsque T décrit $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, ${}^tQ_0TQ_0$ décrit aussi $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On est donc ramené à montrer que, si $S_0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifie $\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})\quad \|D - S\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \geq \|D - S_0\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, alors S_0 est nécessairement diagonale. Pour cela, supposons $S_0 = (s_{ij})$ non diagonale, et introduisons la matrice diagonale $S = \operatorname{diag}(s_{11}, \cdots, s_{nn})$, on a alors $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ car $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad s_{ii} = {}^tE_iSE_i \geq 0$ (*il est classique qu'une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a toutes ses valeurs propres positives ou nulles si et seulement si* $\forall X \in \mathbb{R} \quad {}^tXSX \geq 0$), et

$$\|D - S\|^2_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - s_{ii})^2 < \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - s_{ii})^2 + \sum_{i \neq j} s_{ij}^2 = \|D - S_0\|^2_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\,,$$

ce qui est une contradiction.

d) Posons toujours $\Psi(M) = Q_0D\,{}^tQ_0$, avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. La question **c)** nous ramène à chercher la matrice diagonale $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$ "la plus proche" de D avec des δ_i tous positifs ou nuls. Comme $\|D - \Delta\|^2_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \delta_i)^2$, la seule solution est de prendre $\delta_i = \lambda_i^+ = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } \lambda_i \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La matrice T_0 recherchée est alors $T_0 = Q_0\Delta\,{}^tQ_0$.

Remarque. Par construction, cette matrice T_0 est diagonalisable, ses valeurs propres strictement positives sont celles de $\Psi(M)$ avec les mêmes sous-espaces propres, et son noyau est la somme des sous-espaces propres de $\Psi(M)$ associés aux valeurs propres négatives ou nulles. En particulier, $\operatorname{Ker}\big(\Psi(M)\big) \subset \operatorname{Ker} T_0$.

V.A.2.a) S'il existe n vecteurs de $\mathbb{R}^p$, centrés, tels que $\Psi(\tilde{M}) = T_0$, alors $p \geq \operatorname{rg}\big(\Psi(\tilde{M})\big) = \operatorname{rg}(T_0)$ d'après **III.A.2.** La matrice T_0 n'est pas nulle par hypothèse et, comme $\Psi(M)$ a au moins une valeur propre strictement négative, $\operatorname{Ker} T_0 \neq \{0\}$ (*cf.* remarque ci-dessus), donc $\operatorname{rg}(T_0) \in [\![1, n-1]\!]$. *En fait, on a* $\operatorname{rg}(T_0) \leq n-2$ *puisqu'on a aussi* $Z \in \operatorname{Ker}\Psi(M) \subset \operatorname{Ker} T_0$.

b) Soit $r = \operatorname{rg}(T_0)$. Comme $T_0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $T_0 = Q_0D\,{}^tQ_0$, avec $Q_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les λ_i étant les valeurs propres strictement positives de T_0. En posant $\Delta_1 = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_r}) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, la matrice $U = (\,\Delta_1 \quad 0\,)\,{}^tQ_0$ de $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ vérifie

$$ {}^tUU = Q_0 \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \end{pmatrix} {}^tQ_0 = Q_0 D \, {}^tQ_0 = T_0 \ . $$

c) On a déjà remarqué en **a)** que $Z \in \operatorname{Ker} T_0$, donc ${}^tUUZ = 0$, puis ${}^tZ\,{}^tUUZ = 0$, soit $\|UZ\|^2 = 0$, donc $UZ = 0$, ce qui donne la relation $\displaystyle\sum_{i=1}^n U_i = 0$.

d) En posant $\tilde{M} = \big(\|U_i - U_j\|^2\big)$, les U_i étant centrés, on a $\Psi(\tilde{M}) = {}^tUU$ d'après **II.A.**, donc $\Psi(\tilde{M}) = T_0$.

Ainsi, avec $p = r = \operatorname{rg}(T_0) =$ nombre de valeurs propres strictement positives de $\Psi(M)$, on a montré l'existence de n vecteurs $U_1, \cdots, U_n$ de $\mathbb{R}^p$, centrés, tels que $T_0 = \Psi(\tilde{M})$. C'est la valeur minimale de p pour laquelle cette construction est possible.

V.B. Par décalage de la distance au carré

V.B.1. Soit $X \in \mathcal{H}$, alors de ${}^tP = P$ et $PZ = 0$, on déduit

$$ < \Psi(A)\, X, Z >= -\frac{1}{2} \ < PAPX, Z >= -\frac{1}{2} \ < APX, PZ >= 0 \ , $$

donc $\Psi(A)\, X \in \mathcal{H}$: l'hyperplan $\mathcal{H}$ est stable par $\Psi(A)$.

V.B.2. On a $(\xi_i^j) = J - I_n$, puis $N_k = M + k(J - I_n)$.

V.B.3. La matrice $\Psi(N_k)$ est symétrique, et $\Psi(N_k) = \Psi(M) + k\ \Psi(J) - k\ \Psi(I_n)$. Or, $\Psi(J) = -\dfrac{1}{2}PJP = -\dfrac{1}{2}PZ\,{}^tZP = 0$ et $\Psi(I_n) = -\dfrac{1}{2}P^2 = -\dfrac{1}{2}P$, ce qui donne

$$ \Psi(N_k) = \Psi(M) - \frac{k}{2n}\, J + \frac{k}{2}\, I_n \ . $$

La matrice $\Psi(M)$ admet une base orthonormale de vecteurs propres de la forme $(Z, E_2, \cdots, E_n)$; le vecteur Z est vecteur propre de $\Psi(M)$ et de $\Psi(N_k)$ pour la valeur propre 0, et pour i de 2 à n, le vecteur E_i est dans $\mathcal{H}$ donc $JE_i = 0$ et, si $\Psi(M)\ E_i = \lambda_i\ E_i$, alors $\Psi(N_k)\, E_i = \Big(\lambda_i + \dfrac{k}{2}\Big)\ E_i$.

Les valeurs propres de $\Psi(N_k)$ sont donc 0, et les $\lambda_i + \dfrac{k}{2}$, où les λ_i sont les valeurs propres non nulles (sauf si 0 est valeur propre multiple) de $\Psi(M)$. Donc $\Psi(N_k)$ est à valeurs propres positives ou nulles si et seulement si $k \geq -2\ \min\big(\operatorname{Sp}(\Psi(M))\big)$.

On a donc $k_0 = -2\ \min\big(\operatorname{Sp}(\Psi(M))\big)$.

V.C. Par décalage de la distance

V.C.1) On a $(M_c)_{i,j} = m_{ij} + 2c\,\xi_i^j\, d_{ij} + c^2\, \xi_i^j = m_{ij} + 2c\, d_{ij} + c^2\, \xi_i^j$ puisque d_{ij} est nul si $i = j$. Donc $M_c = M + 2c\, D + c^2(J - I_n)$ et, puique $\Psi(J) = 0$ et $\Psi(I_n) = -\dfrac{1}{2}P$ (*cf.* **V.B.3)** ci-dessus), on obtient

$$ \Psi(M_c) = \Psi(M) + 2c\, \Psi(D) + \frac{c^2}{2}\ P \ , $$

puis

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \qquad {}^tX\,\Psi(M_c)\,X = {}^tX\,\Psi(M)\,X + 2c\,{}^tX\,\Psi(D)\,X + \frac{c^2}{2}\,{}^tXPX\ .$$

V.C.2) Les matrices $\Psi(M)$ et $\Psi(D)$ sont symétriques réelles, donc diagonalisables dans une b.o.n. Si on note $(V_1, \cdots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de $\Psi(M)$, et $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres associées, si un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ se décompose en $X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$, alors un calcul classique donne

$$\lambda_{min}\,{}^tXX = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq {}^tX\,\Psi(M)\,X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda_{max}\,{}^tXX\ ,$$

et des inégalités analogues pour $\Psi(D)$.

V.C.3) • Par hypothèse, $\lambda_{min} < 0$, donc $4\mu_{min}^2 - 2\lambda_{min} > 0$, d'où l'existence de $\tilde{c}$, puis $\sqrt{4\mu_{min}^2 - 2\lambda_{min}} > 2\,|\mu_{min}| \geq 2\mu_{min}$, donc $\tilde{c} > 0$. Remarquons tout de suite que $\tilde{c}$ est la plus grande racine du trinôme $c \mapsto \dfrac{1}{2}c^2 + 2\mu_{min}\,c + \lambda_{min}$, ce trinôme ayant deux racines réelles distinctes.

• Prenons $c = \tilde{c}$: alors, si X est vecteur propre de $\Psi(M_c)$ pour une valeur propre λ non nulle, on a $X \in \mathcal{H}$ (en effet, Z est vecteur propre de $\Psi(M_c)$ pour la valeur propre 0 et les sous-espaces propres de $\Psi(M_c)$ sont deux à deux orthogonaux), donc $PX = X$, puis

$$\lambda\ {}^tXX = {}^tX\,\Psi(M_c)\,X \geq \big(\lambda_{min} + 2\tilde{c}\,\mu_{min} + \frac{1}{2}\,\tilde{c}^2\big)\ {}^tXX\ ,$$

et le terme entre parenthèses est nul d'après la remarque ci-dessus. On en déduit que $\lambda \geq 0$.

• Si $c > \tilde{c}$, si $X \in \mathcal{H}$ est non nul, alors

$${}^tX\,\Psi(M_c)\,X \geq \big(\lambda_{min} + 2c\,\mu_{min} + \frac{1}{2}\,c^2\big)\,{}^tXX\ ,$$

et le terme entre parenthèses est strictement positif d'après l'étude du trinôme faite ci-dessus, donc ${}^tX\,\Psi(M_c)\,X > 0$.

V.C.4) • D'abord, $\mathcal{A}$ est non vide : tout vecteur propre unitaire de $\Psi(M)$ associé à une valeur propre strictement négative (il en existe) est dans $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est borné car inclus dans la sphère unité (les éléments de $\mathcal{A}$ sont de norme 1), il est fermé car intersection de l'hyperplan $\mathcal{H}$ (fermé) et de l'image réciproque du fermé $\mathbb{R}_+$ par l'application continue $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $X \mapsto 4\big({}^tX\,\Psi(D)\,X\big)^2 - 2\,{}^tX\,\Psi(M)\,X$. Donc $\mathcal{A}$ est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. L'application α est continue sur le compact non vide $\mathcal{A}$ (car composée d'applications polynomiales en les coordonnées du vecteur X et de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$), donc elle atteint sur $\mathcal{A}$ un maximum $\alpha^* = \alpha(X^*) = \max\limits_{X \in \mathcal{A}} \alpha(X)$.

• Pour $X \in \mathcal{A}$, le trinôme $c \mapsto \dfrac{c^2}{2} + 2\,\big({}^tX\ \Psi(D)\ X\big)\,c + {}^tX\ \Psi(M)\ X$ a deux racines réelles ou une double, et le réel $\alpha(X)$ est sa plus grande racine. Or, le produit des racines vaut $2\ {}^tX\ \Psi(M)\,X$, donc si X_0 est un vecteur propre unitaire associé à une valeur propre strictement négative de $\Psi(M)$, alors $X_0 \in \mathcal{A}$ et ce produit est strictement négatif, donc la plus grande racine $\alpha(X_0)$ est strictement positive. On a a fortiori $\alpha^* \geq \alpha(X_0) > 0$.

V.C.5) • Comme $X^* \in \mathcal{A}$, on a $X^* \in \mathcal{H}$ et ${}^tX^*PX^* = {}^tX^*X^* = \|X^*\|^2 = 1$, donc

$$ {}^tX^*\,\Psi(M_{\alpha^*})\,X^* = {}^tX^*\,\Psi(M)\,X^* + 2\alpha^*\;{}^tX^*\,\Psi(D)\,X^* + \frac{(\alpha^*)^2}{2} $$

et ceci vaut 0 car on a vu que $\alpha^* = \alpha(X^*)$ est racine du trinôme

$$ c \mapsto \frac{c^2}{2} + 2\left({}^tX^*\,\Psi(D)\,X^*\right)c + {}^tX^*\,\Psi(M)\,X^* \,. $$

• La matrice $\Psi(M_{\alpha^*})$ est diagonalisable dans une base orthonormale de la forme $(Z, E_2, \cdots, E_n)$, notons 0, λ_2, $\cdots$, λ_n les valeurs propres associées. Les E_k $(2 \le k \le n)$ sont unitaires et dans $\mathcal{H}$, donc :

- si $E_k \notin \mathcal{A}$, le trinôme $c \mapsto \dfrac{c^2}{2} + 2\left({}^tE_k\,\Psi(D)\,E_k\right)c + {}^tE_k\,\Psi(M)\,E_k$ n'a pas de racine réelle et ne prend donc que des valeurs strictement positives, en particulier pour $c = \alpha^*$, donc

$$ \lambda_k = {}^tE_k\,\Psi(M_{\alpha^*})\,E_k = {}^tE_k\,\Psi(M)\,E_k + 2\alpha^*\;{}^tE_k\,\Psi(D)\,E_k + \frac{(\alpha^*)^2}{2} > 0 \,. $$

- si $E_k \in \mathcal{A}$, le même trinôme admet $\alpha(E_k)$ comme plus grande racine, donc prend des valeurs positives ou nulles sur $\left[\alpha(E_k), +\infty\right[$ et, comme $\alpha^* \ge \alpha(E_k)$, on a $\lambda_k \ge 0$.

En conclusion, $\mathrm{Sp}\left(\Psi(M_{\alpha^*})\right) \subset \mathbb{R}_+$.

• Si $c > \alpha^*$ et si $X \in \mathcal{H}$ est unitaire, alors

$$ {}^tX\,\Psi(M_c)\,X = {}^tX\,\Psi(M)\,X + 2c\;{}^tX\,\Psi(D)\,X + \frac{c^2}{2} $$

est strictement positif (dissocier les cas $X \notin \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}$ comme ci-dessus). Par homogénéité, cela reste vrai si X est quelconque non nul.

• Le réel α^* est strictement positif et vérifie les conditions :

▷ $\Psi(M_{\alpha^*})$ est à valeurs propres positives ou nulles ;

▷ $\forall c > \alpha^* \quad \forall X \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \qquad {}^tX\;\Psi(M_c)\,X > 0$.

Si un réel c strictement inférieur à α^* vérifiait ces conditions, on aurait ${}^tX^*\,\Psi(M_{\alpha^*})X^* > 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc α^* est le plus petit réel vérifiant ces conditions, ce qui correspond à la définition de c^*. Donc $c^* = \alpha^*$.

V.C.6.a) La matrice $\Psi(M_{c^*})$ est symétrique positive, soit $(V_1, \cdots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, décomposons $X^* = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i V_i$.

Alors ${}^tX^*\,\Psi(M_{c^*})\,X^* = 0$ d'après **V.C.5.**, soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = 0$, mais tous les termes étant positifs, ils sont tous nuls, ce qui entraîne $\forall i \quad \lambda_i x_i = 0$, soit $\Psi(M_{c^*})\,X^* = 0$.

b) Calculons

$$ \begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Psi(M)\,X^* \\ -Y^* - 4\Psi(D)\,X^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^*Y^* \\ V \end{pmatrix} \,, $$

avec $V = -\dfrac{2}{c^*}\,\Psi(M)\,X^* - 4\Psi(D)\,X^* = -\dfrac{2}{c^*}\left(-\dfrac{(c^*)^2}{2}\,X^*\right)$, en utilisant la relation

$$\Psi(M_{c^*})\,X^* = \Psi(M)\,X^* + 2c^*\,\Psi(D)\,X^* + \frac{(c^*)^2}{2}\,X^* = 0\,.$$

Finalement, $V = c^* X^*$, et le vecteur $\begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix}$ est bien vecteur propre de la matrice $B := \begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix}$, pour la valeur propre c^*.

V.C.7.a) Par hypothèse, on a $\begin{cases} 2\,\Psi(M)\,X_2 & = \gamma\,X_1 \quad \textbf{(1)} \\ -X_1 - 4\Psi(D)\,X_2 & = \gamma\,X_2 \quad \textbf{(2)} \end{cases}$. De **(2)**, on déduit que $X_2 \neq 0$, sinon $X_1 = 0$ aussi et $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ n'est pas vecteur propre.

Si $\gamma = 0$, alors $\gamma \leq c^*$.

Si $\gamma \neq 0$, alors **(1)** donne $X_1 \in \mathcal{H}$, puis **(2)** donne $X_2 \in \mathcal{H}$, mais alors

$$\begin{aligned} \Psi(M_\gamma)\,X_2 &= \Psi(M)\,X_2 + 2\gamma\,\Psi(D)\,X_2 + \frac{\gamma^2}{2} P X_2 \\ &= \frac{\gamma}{2}\,X_1 + 2\gamma\left(-\frac{1}{4}X_1 - \frac{\gamma}{4}X_2\right) + \frac{\gamma^2}{2}\,X_2 \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

donc ${}^tX_2\,\Psi(M_\gamma)\,X_2 = 0$ et, comme X_2 est un vecteur non nul de $\mathcal{H}$, cela entraîne $\gamma \leq c^*$.

b) Le nombre c^* est donc la plus grande valeur propre de la matrice $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.