Un corrigé de Maths 2 CCP PSI 2012

Rodolphe Garin

10 Mai 2012

PARTIE I

I.1) Il est clair que P est le point d'intersection de l'axe des abscisses et du cercle de centre O et de rayon 1, Q (respectivement R) est le point d'intersection de la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et du cercle de centre O et de rayon 1 situé au-dessus (respectivement en dessous) de l'axe des abscisses donc on laisse au lecteur le soin de construire T et D.
-) déterminons une équation cartésienne de la droite (PQ) :
le point $M(x, y)$ appartient à la droite (PQ) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires donc $\left(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ}\right)$ est une famille liée soit $\begin{vmatrix} x-1 & -\frac{3}{2} \\ y & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 1 = 0$, ainsi une équation cartésienne de la droite (PQ) est $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$.
-) déterminons une équation cartésienne de la droite (PR) :
le point $M(x, y)$ appartient à la droite (PR) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires donc $\left(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR}\right)$ est une famille liée soit $\begin{vmatrix} x-1 & -\frac{3}{2} \\ y & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{3}y - 1 = 0$, ainsi une équation cartésienne de la droite (PR) est $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$.
-) déterminons une équation de la droite (QR) : comme les points Q et R sont distincts et de même abscisse $-\frac{1}{2}$ alors une équation de (QR) est $x + \frac{1}{2} = 0$ ou $2x + 1 = 0$.
Notons $\Pi^O_{(PQ)}$ (respectivement $\Pi^O_{(PR)}$ et $\Pi^O_{(QR)}$) le demi-plan ouvert contenant O défini par la droite (PQ) (respectivement (PR) et (QR)); alors $\Pi^O_{(PQ)}$ (respectivement $\Pi^O_{(PR)}$ et $\Pi^O_{(QR)}$) est défini par $x+\sqrt{3}y-1 < 0$ (respectivement $x-\sqrt{3}y-1 < 0$ et $2x+1 > 0$).
Or $M(x + iy) \in T$ si, et seulement si $M \in \Pi^O_{(PQ)} \cap \Pi^O_{(PR)} \cap \Pi^O_{(QR)}$ donc si et seulement si x et y vérifient les trois inégalités : $2x + 1 > 0, x - \sqrt{3}y - 1 < 0, x + \sqrt{3}y - 1 < 0$.

I.2.1) On a $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et comme $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq 0$ alors 1 est valeur propre de A.

I.2.2) Puisque A est d'ordre 3 alors 1, λ et $\overline{\lambda}$ sont simples donc $tr(A) = 1+\lambda+\overline{\lambda} = 1+2a$ et $tr\left(A^2\right) = 1^2 + \lambda^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 + 2\left(a^2 - b^2\right)$.

I.2.3) Par définition $tr(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$ donc puisque A vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$ alors $tr(A) > 0$. De même $tr\left(A^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{i,j}a_{j,i} > \sum\limits_{i=1}^{3} a_{i,i}^2$ car A vérifie la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$. Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(tr(A))^2 = (1 \times a_{1,1} + 1 \times a_{2,2} + 1 \times a_{3,3})^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{3} 1^2\right) \times \left(\sum\limits_{i=1}^{3} a_{i,i}^2\right) < 3tr\left(A^2\right)$.

I.2.4) En utilisant les questions I.2.2 et I.2.3 on a d'une part $2a+1 = tr(A) > 0$ et d'autre part $(1+2a)^2 = (tr(A))^2 < 3tr\left(A^2\right) = 3\left(1+2a^2-2b^2\right) \Leftrightarrow 0 < a^2-2a+1-3b^2 =$

$(a-1)^2-3b^2=\left(a-\sqrt{3}b-1\right)\left(a+\sqrt{3}b-1\right)$.
I.2.5) En suivant les indications de l'énoncé et la question précédente il suffit de prouver que $M(\lambda)$ n'appartient pas à la région de D limitée par la droite (PQ) et l'arc $\widehat{PQ}$, ce qui est vrai car $M(x+iy)$ appartient à cette région si, et seulement si $x+\sqrt{3}y-1>0$ et $x-\sqrt{3}y-1<0$ donc $\left(x+\sqrt{3}y-1\right)\left(x-\sqrt{3}y-1\right)<0$, ainsi qu'à la région de D limitée par la droite (PR) et l'arc $\widehat{RP}$, ce qui est vrai car $M(x+iy)$ appartient à cette région si, et seulement si $x+\sqrt{3}y-1<0$ et $x-\sqrt{3}y-1>0$ donc $\left(x+\sqrt{3}y-1\right)\left(x-\sqrt{3}y-1\right)<0$, donc $M(\lambda)\in T$.
On peut aussi procéder comme suit: d'après la question précédente $a-\sqrt{3}b-1$ et $a+\sqrt{3}b-1$ ont même signe donc si $a-\sqrt{3}b-1>0$ et $a+\sqrt{3}b-1>0$ alors $a^2-3b^2>1>a^2+b^2\Rightarrow -4b^2>0$ ce qui est absurde donc $a-\sqrt{3}b-1<0$ et $a+\sqrt{3}b-1<0$ ce qui assure en utilisant I.2.4 que $M(\lambda)\in T$.
I.3.1) On a $j^2=\overline{j}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{i\pi}e^{\frac{i\pi}{3}}=-e^{\frac{i\pi}{3}}$ donc $2r\cos(\theta)=2\operatorname{Re}(\lambda)=\lambda+\overline{\lambda}, 2r\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=2\operatorname{Re}(\lambda j)=j\lambda+j^2\overline{\lambda}, -2r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2\operatorname{Re}\left(j^2\lambda\right)=j^2\lambda+j\overline{\lambda}$. Ainsi
$\alpha=\frac{1+\lambda+\overline{\lambda}}{3}, \beta=\frac{1+j\lambda+j^2\overline{\lambda}}{3}, \gamma=\frac{1+j^2\lambda+j\overline{\lambda}}{3}$.
I.3.2) Comme $M(\lambda)\in T$ alors d'après la question I.1, on a $3\alpha=2\operatorname{Re}(\lambda)+1>0\Rightarrow\alpha>0, 1-r\cos(\theta)-\sqrt{3}r\sin(\theta)=3\beta>0\Rightarrow\beta>0$ et $1-r\cos(\theta)+\sqrt{3}r\sin(\theta)=3\gamma>0\Rightarrow\gamma>0$. Enfin en utilisant l'égalité $1+j+j^2=0$ on a $\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{3}\left(3+\left(\lambda+\overline{\lambda}\right)\left(1+j+j^2\right)\right)=1$. Ainsi A vérifie la propriété $(\mathcal{ST}>0)$.
I.3.3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à J, alors si (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{K}^3$ on a $f(e_1)=e_3, f(e_2)=e_1, f(e_3)=e_2$ d'où $f^2(e_1)=e_2, f^2(e_2)=e_3, f^2(e_3)=e_1, f^3(e_1)=e_1, f^3(e_2)=e_2, f^3(e_3)=e_3$ ce qui donne $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $J^3=I_3$. Comme $J^3-I_3=0$ alors X^3-1 est un polynôme annulateur de J donc puisque les racines de ce dernier polynôme est $1,j$ et j^2, alors $Sp_{\mathbb{C}}(J)\subset\left\{1,j,j^2\right\}$. On a $J\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc 1 est valeur propre de J et J étant à coefficients réels alors $Sp_{\mathbb{C}}(J)=\{1\}$ ou $\left\{1,j,j^2\right\}$. Puisque $tr(J)=0$ alors $Sp_{\mathbb{C}}(J)\neq\{1\}$ donc $Sp_{\mathbb{C}}(J)=\left\{1,j,j^2\right\}$.
I.3.4) On a $A=\alpha I_3+\beta J+\gamma J^2$ donc si $\mathcal{P}(X)=\alpha+\beta X+\gamma X^2$ alors $\mathcal{P}(J)=A$. Ainsi d'après la question précédente, $\mathcal{P}(1)=1, \mathcal{P}(j)=\alpha+\beta j+\gamma j^2=\overline{\lambda}$ et $\mathcal{P}\left(j^2\right)=\alpha+\beta j^2+\gamma j=\lambda$ sont des valeurs propres de A d'où puisque A est d'ordre 3, alors $1,\lambda$ et $\overline{\lambda}$ sont les valeurs propres de A.

PARTIE II
II.1) Compte tenu des hypothèses $AU=U$ et $U\neq 0$ ce qui assure que 1 est valeur propre de A.
II.2.1) Puisque $BX=0$ alors $\sum\limits_{j=1}^{n}b_{k,j}x_j=0\Rightarrow b_{k,k}x_k=-\sum\limits_{j=1,j\neq k}^{n}b_{k,j}x_j\Rightarrow|b_{k,k}|\,|x_k|\leq$

$\sum\limits_{j=1,j\neq k}^{n}|b_{k,j}|\,|x_j|$. Puisque $X\neq 0$ alors $|x_k|\neq 0$ et par définition de k, on a $\frac{|x_j|}{|x_k|}\leq 1$ d'où $|b_{k,k}|\leq \sum\limits_{j=1,j\neq k}^{n}|b_{k,j}|$.

II.2.2) Comme $\lambda\in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ alors $\det(A-\lambda I_n)=0$ donc d'après la question précédente, on a $|a_{k,k}-\lambda|\leq \sum\limits_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{k,j}|=\sum\limits_{j=1,j\neq k}^{n}a_{k,j}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{k,j}-a_{k,k}=1-a_{k,k}$.
De l'inégalité précédente on a $2a_{k,k}-1\leq\lambda\leq 1$, et comme $a_{k,k}>0\Rightarrow -1<2a_{k,k}-1$ alors $-1\leq\lambda\leq 1\Leftrightarrow|\lambda|\leq 1$.

II.2.3) D'après la question précédente, $\left|a_{k,k}-e^{i\theta}\right|^2=(a_{k,k}-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta)=1+a_{k,k}^2-2a_{k,k}\cos(\theta)\leq(1-a_{k,k})^2=1+a_{k,k}^2-2a_{k,k}$
$\Rightarrow 0\leq 2a_{k,k}(1-\cos(\theta))\leq 0\Rightarrow\cos(\theta)=1$ car $a_{k,k}>0$ donc $\theta=2k\pi\Rightarrow\lambda=1$.

II.3.1) Par propriété du déterminant on a $\det({}^tA-I_n)=\det({}^t(A-I_n))=\det(A-I_n)=0$ ce qui assure que $1\in Sp_{\mathbb{C}}({}^tA)$. De même $rg({}^tA-I_n)=rg(A-I_n)$ d'où par le théorème du rang $\dim E_1(A)=n-rg(A-I_n)=n-rg({}^tA-I_n)=\dim E_1({}^tA)$.

II.3.2) On a ${}^tAV=V$ donc $\forall i\in[[1,n]],v_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{j,i}v_j\Rightarrow|v_i|\leq\sum\limits_{j=1}^{n}a_{j,i}|v_j|$.
S'il existe $p\in[[1,n]]$ tel que $|v_p|<\sum\limits_{j=1}^{n}a_{j,p}|v_j|$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n}|v_i|<\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{j,i}|v_j|=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{j,i}\right)|v_j|=\sum\limits_{j=1}^{n}|v_j|$ ce qui est absurde donc toutes les inégalités sont des égalités.
Dès lors $\forall i\in[[1,n]],|v_i|=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{j,i}|v_j|$ donc ${}^tA|V|=|V|$ et donc $V\neq 0\Rightarrow$ il existe $p\in[[1,n]]$ tel que $|v_p|>0$ d'où $\forall i\in[[1,n]],|v_i|=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{j,i}|v_j|>a_{p,i}|v_p|>0$.

II.3.3) Puisque $Y\neq 0$ alors d'après la question précédente $y_1\neq 0$, et en posant $Z=X-\frac{x_1}{y_1}Y=\begin{pmatrix}z_1\\ .\\ z_n\end{pmatrix}$ on a d'une part $z_1=0$ et d'autre part $Z\in E_1({}^tA)$ donc d'après la question précédente $Z=0\Rightarrow X=\frac{x_1}{y_1}Y\Rightarrow\dim E_1({}^tA)\leq 1$. Ainsi comme $\dim E_1({}^tA)\geq 1$ on a $\dim E_1({}^tA)=1$. D'après la question précédente on peut considérer $X=\begin{pmatrix}x_1\\ .\\ x_n\end{pmatrix}\in E_1({}^tA),x_i>0$, d'où en posant $s=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ et $\Omega=\frac{1}{s}X=\begin{pmatrix}\omega_1\\ .\\ \omega_n\end{pmatrix}$ on a $\forall i\in[[1,n]],\omega_i>0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$. S'il existe $\Omega'=\begin{pmatrix}\omega'_1\\ .\\ \omega'_n\end{pmatrix}$ vérifiant les mêmes conditions puisque $\dim E_1({}^tA)=1$ alors il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $\Omega'=\alpha\Omega\Rightarrow 1=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega'_i=\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=\alpha$ d'où $\Omega'=\Omega$. Puisque ${}^tA\Omega=\Omega$ alors $\forall i\in[[1,n]],\omega_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{j,i}\omega_j$.

II.3.4) Dans les questions précédentes on a prouvé que 1 est valeur propre de A et le sous-espace associé est de dimension 1, et que les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

II.4) Soit u l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}^n$ définie par $u\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}\right) = (\omega_1 x_1, ..., \omega_n x_n)$, alors u est linéaire et en utilisant la question II.3.3 on prouve que u est injective donc si $\|.\|_1$ est la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par $\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ comme $N = \|.\|_1 \circ u$ alors N est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et en posant $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ on a $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \Rightarrow$ $N(AX) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i |y_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\omega_i\right) |x_j| = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j |x_j| = N(X)$.

Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ donc il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ donc $|\lambda| N(X) = N(AX) \leq N(X) \Rightarrow |\lambda| \leq 1$ car $X \neq 0 \Rightarrow N(X) > 0$.

II.5.1) En posant $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ on a $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \Rightarrow$

$\Phi(AX) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}\omega_i\right) x_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \omega_j x_j = \Phi(X)$.

II.5.2) Avec les notations de II.1 $\Phi(U) = 1$ donc Φ est une forme linéaire non nulle donc $\dim\ker(\Phi) = n - 1 \Rightarrow \dim E_1(A) + \dim\ker(\Phi) = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et d'autre part $X \in E_1(A) \cap \ker(\Phi) \Rightarrow X = \alpha U, 0 = \Phi(X) = \alpha\Phi(U) = \alpha \Rightarrow X = 0$ ce qui assure que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \ker(\Phi)$.

II.5.3) Comme $AX = \lambda X$ alors d'après la question II.5.1, $\Phi(X) = \Phi(AX) = \lambda\Phi(X) \Rightarrow (1-\lambda)\Phi(X) = 0 \Rightarrow \Phi(X) = 0$ car $\lambda \neq 1$.

II.5.4) En considérant une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ adaptée à la décomposition donnée par II.5.2 et en remarquant que $\ker(\Phi)$ est stable par d'après II.5.1, on obtient que A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}, B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}) \Rightarrow \chi_A(X) = (1-X)\chi_{B'}(X)$. Comme $E_1(A) \cap \ker(\Phi) = \{0\}$ alors 1 n'est pas racine de $\chi_{B'}$ donc on conclut que l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de A est 1.