Corrigé de Centrale PSI, maths 1, 2010.

Partie I

I. A -

Les trois premières colonnes de C sont libres (car combinaisons de vecteurs de la base canonique différents), et les suivantes, soit répètent l'une de ces colonnes, soit sont nulles. Donc le rang de C est 3 et une base de l'image de c est constituée des trois premières colonnes de C , soit :

$$\operatorname{Im}(c) = Vect(f_1, f_2, f_3) = Vect\big(e_3 + e_4 + e_5, e_2 + e_6, e_1 + e_7\big) \quad .$$

Par le théorème du rang, la dimension de $\operatorname{Ker} c$ est 4 . Une base en est clairement

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} c} = \big\{e_2 - e_5, e_3 - e_5, e_6, e_7\big\} \quad .$$

I. B -

I. B.1) On a vu que $F = \operatorname{Im} c$, donc F est stable par c clairement.

I. B.2) On a déjà dit pourquoi $\big(f_1, f_2, f_3\big)$ était libre, c'est donc une base de F .
Par linéarité de c , on lit sur la matrice C :

$$\begin{aligned} c(f_1) &= c(e_3) + c(e_4) + c(e_5) = 2f_3 + f_2 \quad ; \\ c(f_2) &= c(e_2) + c(e_6) = f_2 \quad ; \\ c(f_3) &= c(e_1) + c(e_7) = f_1 \quad . \end{aligned}$$

Donc la matrice de la restriction de c à F est $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I. C -

I. C.1) D'après ci-dessus, on a $c(f_2) = f_2$, f_2 est non nul, donc c'est un vecteur propre pour la valeur propre 1 .

I. C.2) On sait que sur $\mathbb{C}$ la trace est la somme des valeurs propres . Donc si on appelle λ_2 et λ_3 les deux autres valeurs propres , la trace de Φ donne seulement que $1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, i.e. $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Cette relation à elle seule n'exclut pas que deux valeurs propres puissent être égales (à 1 ou à0 . . .), donc on ne peut pas conclure à la diagonalisabilité de Φ .

I. C.3) On a $\Phi^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On sait (par une trigonalistaion par exemple) que la trace de Φ^2 est $5 = 1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$.
Comme d'après ci-dessus $\lambda_2 = -\lambda_3$, on en déduit $\lambda - 2 = -\lambda - 3 = -\sqrt{2}$. Donc, Φ ayant trois racines réelles distinctes, est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I. D -

I. D.1) On a donc trouvé trois valeurs propres , et on sait que $\operatorname{Ker} c$ est dimension 4 , soit que 0 est valeur propre de multiplicté au moins 4 . Comme la somme des multiplicités des valeurs propres doit faire 7 , on a que le spectre de C est constitué de 0 de multiplicité 4 , et de $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ de multiplicité 1 chacune.

I. D.2) Mais aussi la somme des dimension des sous-espaces propres fait bien 7 , donc C est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donc a fortiori sur $\mathbb{C}$.
Un matrice semblable à C est la matrice diagonale $diag(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0)$.

I. E -

I. E.1) La fonction nulle vérifie l'équation, et si f et g sont deux fonctions la vérifiant, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f+g)\circ c = \lambda f\circ c + g\circ c = \lambda f + g$, donc il y a stabilité par combinaison linéaire. Comme de plus l'ensemble des fonctions de classe C^1 est aussi stable par combinaison linéaire, on en déduit que l'ensemble des fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^7$ satisfaisant l'équation fonctionnelle est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I. E.2) C'est clair par récurrence sur n : c'est vrai par définition à l'ordre $n=1$, et par associativité de la loi $\circ$, si c'est vrai à l'ordre (n-1) ,$alors f\circ c^n = (f\circ c^{n-1}n)\circ c = f\circ c = f$, et la relation passe à l'ordre n .

I. E.3) On écrira en abrégé $\partial_k f$ pour $\partial_k f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$. Par téhorème de composition, on a :

$$J_{f\circ c} = [\,\partial_3 f + \partial_4 f + \partial_5 f \mid \partial_2 f + \partial_6 f \mid \partial_1 f + \partial_7 f \mid \partial_1 f + \partial_7 f \mid \partial_2 f + \partial_6 f \mid 0 \mid 0\,] \quad .$$

En égalant cette matrice à J_f , on obtient le système :

$$\begin{cases} \partial_1 f = \partial_3 f + \partial_4 f + \partial_5 f \\ \partial_2 f = \partial_2 f + \partial_6 f \\ \partial_3 f = \partial_1 f + \partial_7 f \\ \partial_4 f = \partial_1 f + \partial_7 f \\ \partial_5 f = \partial_2 f + \partial_6 f \\ \partial_6 f = 0 \\ \partial_7 f = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_1 f = \partial_3 f + \partial_4 f + \partial_5 f \\ \partial_1 f = \partial_3 f = \partial_4 f \\ \partial_2 f = \partial_5 f \\ \partial_6 f = \partial_7 f = 0 \end{cases} \quad .$$

I. E.4) De même, la matrice jacobienne de $f\circ c^2$ est

$$[\,2\partial_1 f + \partial_2 f + \partial_6 f + 2\partial_7 f \mid \partial_2 f + \partial_6 f \mid \partial_3 f + \partial_4 f + \partial_5 f \mid \partial_3 f + \partial_4 f + \partial_5 f \mid \partial_2 f + \partial_6 f \mid 0 \mid 0\,] \ ,$$

ce qui rajoute les équations suivantes à celles précédemment obtenues :

$$\begin{cases} \partial_1 f + \partial_2 f = 0 \\ \partial_4 f + \partial_5 f = 0 \\ \partial_3 f + \partial_5 f = 0 \end{cases} \quad .$$

Finalement, les conditions nécessaires obtenues sur f s'écrivent :

$$\partial_1 f = \partial_3 f = \partial_4 f = -\partial_2 f = -\partial_5 f \ ; \quad \partial_6 f = \partial_7 f = 0 \quad .$$

I. E.5) Pour une application linéaire, les dérivées $\partial_k f$ sont des constantes. Donc la matrice d'une forme linéaire solution est proportionnelle à :

$$Mat_f = [\,1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0\,] \quad .$$

On vérifie qu'on a bien $Mat_f \times C = Mat_f$ (ce qui correspond à un vecteur propre pour la matrice ${}^tC$), ainsi on a bien toutes les formes linéaires solution.

Partie II

II. A -

$\dfrac{x}{a}$ est dans J si et seulement si x est dans l'intervalle $J_a = a.J = \{a.x \ , \ x\in J\}$. Pour un tel x , on a alors

$$f\Big(\frac{x}{a}\Big).f'\Big(\frac{x}{a}\Big) = -4\frac{x}{a} \iff f\Big(\frac{x}{a}\Big).\Big(f\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big)' = -4x \quad ,$$

puisque $\Big(f\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big)' = \frac{1}{a}f'\Big(\frac{x}{a}\Big)$. Donc la fonction $g_a(x) = f\Big(\frac{x}{a}\Big)$ est solution de (E) sur J_a .

II. B -

II. B.1) Le double tableau de variations de l'arc γ est :

t	$\frac{\pi}{4}$		π		$\frac{7\pi}{4}$
$\cos(t)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$2\sin(t)$	$+$	$+$	01	$-$	$-$

On voit ainsi que g est définie sur l'intervalle $\left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, et vaut $g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.

II. B.2) Sur $\left]-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, on a $g(x).g'(x) = 2\sqrt{1-x^2}.\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -4x$, donc g vérifie (E) .

II. B.3) Le calcul ci-dessus reste valable sur $]-1,1[$, mais pas au-delà (car g' non définie en ± 1). Donc la solution maximale prolongeant g est $m(x) = 2\sqrt{1-x^2}$ définie sur $]-1,1[$.

II. C -

II. C.1) Cours ...

II. C.2) L'équation (E) se résout en $y' = \dfrac{-4x}{y}$, la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{-4x}{y}$ satisfait aux hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz dans chacun des deux demi-plans (ouverts) de $\mathbb{R}^2 \setminus Ox$ délimités pas la droite Ox .
Cela signifie qu'étant donné un point (x_0, y_0) vérifiant $y_0 \neq 0$, il y a une et une seule solution maximale à (E) passant par ce point, dont le graphe reste constamment dans l'un de ces demi-plans.

II. C.3) Il est clair qu'une solution de (E) ne peut couper l'axe Ox qu'au point $(0,0)$ (le membre de gauche étant alors nul). Mais il n'y a pas de solution à (E) C^1 sur un intervalle contenant 0 et vérifiant $y(0) = 0$. En effet, pour $x \neq 0$ y vérifie $y'(x).\dfrac{y(x)}{x} = -4$, et donc, en faisant tendre x vers 0 on obtiendrait $y'(0)^2 = -4$, ce qui est impossible pour une solution réelle.
Donc toute solution, par continuité, reste dans l'un des deux demi-plans limités par Ox , et est par conséquent une solution donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz, et c'est vrai aussi pour les solutions maximales.

II. C.4) Vu les questions **II.A** et **II.B** , on a déjà que toutes les fonctions de la forme $x \mapsto a.g\left(\frac{x}{a}\right) = \pm 2\sqrt{a^2-x^2}$, $a > 0$ quelconque, sont des solutions maximales sur $]-a,a[$. Mais par unicité au théorème de Cauchy-Lipschitz, il n'y en a pas d'autre. En effet, il passe déjà une solution de cette forme en tout point (x_0, y_0) où $y_0 \neq 0$, il suffit de prendre $a > 0$ tel que

$$4(a^2 - x_0^2) = y_0^2 \Leftrightarrow a^2 = x_0^2 + 4y_0^2 \quad .$$

II. D -

II. D.1) C'est un développement en série entière connu : $(1-x^2)^\alpha$ où $\alpha = \frac{1}{2}$. Le rayon de convergence est 1 , et on obtient sur $]-1,1[$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1-x^2} &= 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \\ &= 2 - x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^{n-1} n!} x^{2n} \quad . \end{aligned}$$

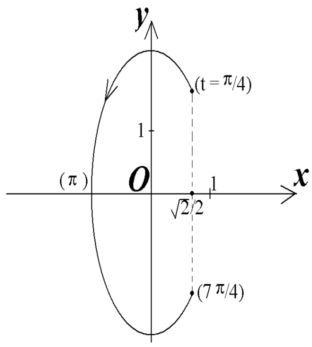
II. D.2) En substituant $\frac{x}{a}$ à x on obtient toutes les solutions de rayon de convergence $|a|$:

$$2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 2 - \frac{x^2}{a^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^{n-1} a^n n!} x^{2n} \quad .$$

Partie III

III. A -

III. A.1) $\mathcal{C}$ est un morceau d'ellipse de demi-axes $a = 2$ et $b = 1$, le demi grand axe étant porté par Oy . Dessin :

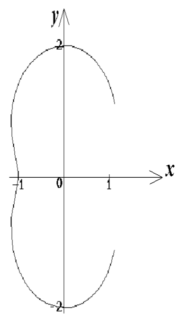


III. A.2) $\mathcal{C}$ est l'image d'un compact par l'application γ continue. C'est donc un compact. Donc **b),c),d)** sont vraies. Ce n'est pas un ouvert, car toute boule centrée sur un point de $\mathcal{C}$ ne peut évidemment pas être incluse dans $\mathcal{C}$. Enfin, $\mathcal{C}$ n'est pas convexe, puisque le segment joignant deux points distincts de $\mathcal{C}$ n'a aucun autre point sur $\mathcal{C}$.

III. B -

III. B.1) On sait que $\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 t} = \sqrt{1 + 3\sin^2 t}$.

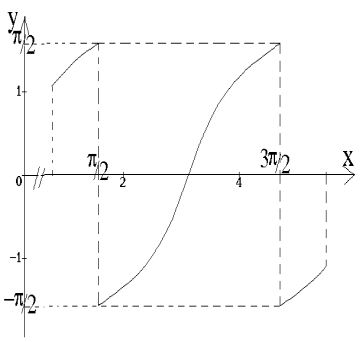
III. B.2) On reconnaît (très) vaguement la lettre ε .



III. B.3) On sait que $\tan\theta(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{2\sin t}{\cos t} = 2\tan t$.

III. B.4)

a) La fonction $t \mapsto \operatorname{Arctan}(2\tan t)$ n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ ni en $\frac{3\pi}{2}$. Mais on peut la prolonger par continuité à gauche et à droite en ces points par les valeurs $\pm\frac{\pi}{2}$ suivant le cas.
Graphe :



b) Pour trouver la fonction θ cherchée, il faut ajouter π à la fonction sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, puis 2π sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$, de manière à "suivre l'angle continûment". L'énoncé donne plus bas l'expression de la "bonne" fonction θ :

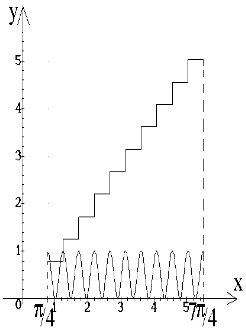
$$\theta(t) = \mathrm{Arctan}(2\tan t) + \pi.E\Big(\frac{t}{\pi} + \frac{1}{2}\Big) \quad .$$

III. B.5) On vérifie avec *Maple* qu'on retrouve bien le tracé de C avec les intructions suivantes :

```
> r := t -> (1+3*(sin(t))^ 2)^ (1/2) ;
> theta := t -> arctan(2*tan(t))+Pi*floor(t/Pi+1/2) ;
> plot([r(t),theta(t),t=Pi/4..7*Pi/4],numpoints=2000,
  coords=polar,scaling=constrained,tickmarks=[3,2],color=black) ;
```

III. C -

III. C.1) α est une fonction en escalier : elle commence à $\pi/4$ pour $t = \pi/4$, puis augmente de $\frac{3\pi}{2n}$ chaque fois que t augmente de $\frac{3\pi}{2n}$.
La variable $u = \frac{2n}{3}(t - \pi/4)$ varie de 0 à $n\pi$, donc ω est la fonction composée $t \mapsto u \mapsto \cos^2(u)$ sur cet intervalle.
Graphes :



III. C.2) . . . C'est juste un arc de sinusoïde sur $u \in [0, \pi]$ . . .

III. C.3) La fonction θ étant constante par morceaux, l'arc est la réunion de segment de droites supportés par des droites passant par l'origine, et inclinées différemment suivant les valeurs de θ . C'est donc la figure **D** qui est la bonne.

III. C.4) . . .

III. D -

III. D.1) Soit D un domaine (simple) du plan, de bord ∂D^+ parcouru dans le sens positif qui laisse l'intérieur de D sur la gauche. Soit $\leq 1 = P.dx + Qdy$ une forme différentielle de classe C^1 sur D . Alors :

$$\int_{\partial D^+} Pdx + Qdy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dxdy \quad .$$

Pour calculer l'aire de D , on peut prendre $\leq 1 = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$.

III. D.2) On a $\langle z_1 \mid z_2 \rangle = \mathrm{Re}(z_1.\overline{z_2}) = \mathrm{Re}(\overline{z_1}.z_2)$.
On a donc $\langle u \circ v \mid v' \rangle = \mathrm{Re}(-i\bar{v}.v')$. Mais $\bar{v}.v' = \sigma.e^{-i\mu}.(\sigma' + I\sigma.\mu')e^{i\mu}$. Donc, $\langle u \circ v \mid v' \rangle = \mathrm{Re}(-i\bar{v}.v') = \sigma^2.\mu'$.
Remarque : c'est une autre façon de retrouver l'égalité $\leq 1 = xdy - ydx = \rho^2.\delta\theta$, forme différentielle qu'on utilise dans la loi des aires. . .

III. D.3) Ici, $d'(t) = \dfrac{1}{1 + 4\tan^2 t}.2(1 + \tan^2 t)$. Comme $\dfrac{1}{1 + 4\tan^2 t} = \dfrac{\cos^2 t}{1 + 3\sin^2 t}$, et que $\cos^2 t.(1 + \tan^2 t) = 1$, on a en définitive que

$$\frac{1}{2}(1 + 3\sin^2 t).d'(t) = 1 \quad .$$

III. D.4) La fonction $\theta(t)$ ne vaut $d(t) = \mathrm{Arctan}(2\tan t)$ qu'à une constante près, mais sa dérivée vaut constamment $d'(t)$. L'aire demandée est égale à l'intégrale de la forme différentielle ≤ 1 ci-dessus, d'abord sur l'arc "extérieur" paramétré par v pour t croissant de $\pi/4$ à $7\pi/4$, puis sur l'arc "intérieur" paramétré par z mais dans le sens des t décroissants de $7\pi/4$ à $\pi/4$. On peut l'écrire ainsi :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{7\pi/4}(1+3\sin^2 t)\Big(1+\frac{1}{4}\sin\big(\frac{2}{3}(t-\frac{\pi}{4})\big)\Big)^2.d'(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{7\pi/4}(1+3\sin^2 t).d'(t)\,dt \quad .$$

Par linéarité de l'intégrale (les "1" s'éliminent), et compte tenu du **III.D.3**, il reste :

$$\mathcal{A} = \int_{\pi/4}^{7\pi/4}\Big(\frac{1}{2}\sin\big(\frac{2}{3}(t-\frac{\pi}{4})\big) + \frac{1}{16}\sin^2\big(\frac{2}{3}(t-\frac{\pi}{4})\big)\Big).d'(t)\,dt \quad .$$

En effectuant le changement de variable $t \mapsto u = \frac{2}{3}(t-\frac{\pi}{4}) \in [0,\pi]$, et compte tenu de la valeur moyenne de $\sin^2 u$ qui vaut $1/2$, on trouve finalement :

$$\mathcal{A} = \frac{3}{2}\int_0^{\pi}\Big(\frac{1}{2}\sin u + \frac{1}{16}\sin^2 u\Big)\,du = \frac{3}{2} + \frac{3}{64}\pi \quad \blacksquare$$

⁂