

Polytechnique, Physique 2 PC

Équilibres thermodynamiques en situations inhomogènes

Concours 2007

I. Équilibre thermodynamique et diffusion

- I.1. (a) La tranche de fluide est soumise, en projection sur la verticale ascendante \vec{e}_z , aux forces de pression à sa base $P(z)S$, aux forces de pression à son sommet $-P(z+dz)S$ et aux forces de pesanteur $-\rho g S dz$. L'équilibre de la tranche de fluide impose $-dP - \rho g dz = 0$ ou $\frac{dP}{dz} = -\rho g$.

- (b) L'équation d'état des gaz parfaits $PM = \rho RT$ permet d'intégrer cette équation sous la forme $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$ ou $\frac{P(z)}{P(z_0)} = \exp\left(-\frac{Mg}{RT}(z - z_0)\right)$.

- (c) $n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{PN_A}{RT}$ s'écrit, en prenant $z_0 = 0$ et $n(z_0) = n_0$, sous la forme du facteur statistique de Boltzmann, $n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$.

- (d) On sait que le potentiel chimique d'un gaz parfait vérifie $\mu(P, T) = \mu(P^\circ, T) + RT \ln \frac{P}{P^\circ}$ donc $\mu(P(z), T) - \mu(P(z_0), T) = RT \ln \frac{P(z)}{P(z_0)}$ soit aussi $\mu(P(z), T) - \mu(P(z_0), T) = -Mg(z - z_0)$, qu'on peut bien écrire $\mu(P, T) + Mgz = \text{cte}$.

- I.2. (a) La particule étudiée est soumise à son poids $m\vec{g}$, à la poussée d'Archimède (résultante des contraintes normales ou forces de pression) $-m'\vec{g}$ et à la résultante $-\alpha\vec{v}$ des contraintes tangentielles. L'équation du mouvement $m\frac{d\vec{v}}{dt} = (m - m')\vec{g} - \alpha\vec{v}$ fournit donc une solution de régime permanent $\vec{v}_d = \frac{m - m'}{\alpha}\vec{g}$.

- (b) Le courant particulaire demandé s'écrit $\vec{j}_d = n(z)\vec{v}_d$ donc $\vec{j}_d = n(z)\frac{m - m'}{\alpha}\vec{g}$.

- I.3. Le courant de diffusion (qui se superpose à \vec{j}_d) s'écrit (loi de Fick) $\vec{j}_D = -D\frac{dn}{dz}\vec{e}_z$ et la condition d'équilibre $\vec{j}_d + \vec{j}_D = \vec{0}$ impose $D\frac{dn}{dz} + \frac{m - m'}{\alpha}gn(z) = 0$. Cette équation différentielle s'intègre selon $n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{m - m'}{\alpha D}gz\right)$.

- I.4. (a) La prise en compte de la force d'Archimède revient à remplacer $n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$ par $n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{(m - m')gz}{k_B T}\right)$, en diminuant le poids apparent des particules dans le fluide dans lequel elles sont en équilibre.

- (b) La comparaison des deux expressions impose $\alpha D = k_B T$.

- I.5. On obtient $6\pi\eta a D = k_B T$ ce qu'on peut écrire $\ln D = \text{cte} - \ln a$; on obtient bien une droite de pente -1 , comme sur la figure de l'énoncé à gauche, ce qui valide le modèle développé.

Dans le cas d'une molécule sphérique de rayon a et de masse molaire $M = N_A \rho \frac{4}{3} \pi a^3$, on obtient de même $\ln D = \text{cte}' - \frac{1}{3} \ln M$; cette droite de pente $-1/3$, conforme à la figure de l'énoncé à droite, valide aussi le modèle.

- I.6. On a vu que $\mu + Mgz$ est une constante, donc $RT \ln C_S + Mgz$ est une constante, expression qui apparaît donc comme cohérente avec la relation $\ln \frac{C_S}{C_S^0} = -\frac{Mgz}{RT}$ établie plus haut lors de l'étude statistique de la répartition des molécules de soluté dans le solvant.

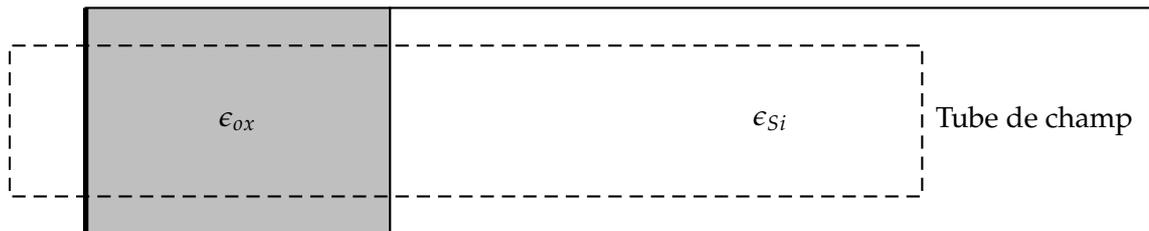
II. Structure Métal–Oxyde–Semiconducteur

II.1. Distribution de charges dans le silicium loin de l'oxyde.

- (II.1.1) On a pour condition de neutralité $\rho = -ne + pe - N_a e = 0$ soit $0 = p - N_a - \frac{n^2}{p}$, qui est une équation du second degré $p^2 - N_a p - n_i^2 = 0$ de discriminant $\Delta = n_a^2 + 4n_i^2 \simeq N_a^2 > 0$; on ne conserve que la seule racine positive $p = \frac{N_a + \sqrt{\Delta}}{2} \simeq N_a$ soit $p \simeq N_a$.
- (II.1.2) $n = \frac{n_i^2}{N_a}$ soit $n \simeq 10^9 \text{ m}^{-3} \ll p$: au niveau de la base B, loin de l'interface, il n'y a pas d'électrons et la conduction est assurée par les seuls trous.

II.2. Distribution de charges dans le silicium pour $V_{GB} < 0$. Accumulation.

- (II.2.1) Le champ électrique dirigé dans le sens des potentiels décroissants vérifie $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$ avec $E(z) < 0$. Les charges mobiles positives subissent donc $\vec{F} = +e\vec{E}$ avec $\vec{F} \cdot \vec{e}_z < 0$: ces trous sont attirés par l'interface métal–oxyde.
- (II.2.2) En présence d'un champ uniforme, la différence de potentiel U vérifie $U = \frac{|E|}{d}$ où le théorème de Gauss permet d'exprimer la densité surfacique de charges libres $\sigma = \epsilon_{ox}|E|$; on en déduit la capacité surfacique $C = \frac{\sigma}{V}$ soit $C_{ox} = \frac{\epsilon_{ox}}{d}$.
- (II.2.3) L'oxyde étant un isolant, on peut appliquer le théorème de Gauss à un tube de champ qui le traverse de la grille à la surface de séparation en $z = 0$ (ces deux surfaces incluses). Le flux du champ électrique à travers les parois latérales d'un tel tube est nul (par définition d'un tube de champ); les extrémités du tube sont aussi situées dans des zones de champ nul.



La charge totale dans le tube est donc nulle; on en conclut que la grille porte la charge par unité de surface $Q_G = -\sigma < 0$ (en $z = -d$); la tension aux bornes de ce condensateur étant $V_{ox} = \phi(G) - \phi(0) < 0$, on peut écrire $Q_G = \frac{\epsilon_{ox} V_{ox}}{d}$. D'autre part, dans le silicium resté ici neutre, l'équation de Poisson impose $\phi''(z) = 0$ donc $\phi(z) = \alpha z + \phi(0)$ est affine. Comme par ailleurs au niveau de la base $\phi(z \rightarrow \infty) = 0$, on a forcément $\alpha = 0$ donc $\phi(z) = 0$ pour tout $z > 0$. Finalement, $V_{ox} = V_{GB}$ donc $Q_G = \frac{\epsilon_{ox} V_{GB}}{d}$

- (II.2.4) Compte tenu de la relation entre $n(z)$ et $p(z)$, il vient $\rho(z) = e \left[p(z) - N_a - \frac{n_i^2}{p(z)} \right]$; toutefois, si on peut négliger la densité d'électrons libres comme on l'a affirmé plus haut, $N_a \gg \frac{n_i^2}{p(z)}$ donc $\rho(z) \simeq e [p(z) - N_a]$. On remarquera que ce résultat, vrai à proximité de la base, l'est *a fortiori* au fur et à mesure qu'on s'approche de la grille, puisque le potentiel diminue, les trous devenant plus nombreux.

(II.2.5) Il s'agit à nouveau du **facteur statistique de Boltzmann** : la probabilité de présence d'une particule mobile augmente lorsque son énergie potentielle $E_p = +e\phi(z)$ diminue. La répartition est normalisée au niveau de la base, où $p(z) = N_a$ reste égal à sa valeur de repos du fait de la grande dimension du barreau de Silicium. Dans le cas où $V_{GB} < 0$, on aura bien sûr $\phi(z) < 0$ dans tout le barreau : les trous, attirés par la grille, sont partout en plus grand nombre qu'au niveau de la base et $p(z) \geq N_a$.

(II.2.6) On a établi l'expression de ρ , donc $\phi''(z) = -\frac{eN_a}{\epsilon_{Si}} \left[\exp\left(-\frac{\phi(z)}{V_T}\right) - 1 \right]$. Après multiplication par $\phi'(z)$, cette équation s'intègre selon $\frac{\phi'^2(z)}{2} = \frac{eN_a V_T}{\epsilon_{Si}} \left[\exp\left(-\frac{\phi(z)}{V_T}\right) + \frac{\phi(z)}{V_T} + \text{cte} \right]$; au niveau de la base, on peut écrire $0 = \frac{eN_a V_T}{\epsilon_{Si}} [1 + \text{cte}]$ en l'absence de champ électrique loin de l'interface; on en déduit bien l'expression demandée, $\phi'^2(z) = \frac{2eN_a V_T}{\epsilon_{Si}} \left[\exp\left(-\frac{\phi(z)}{V_T}\right) + \frac{\phi(z)}{V_T} - 1 \right]$.

(II.2.7) Le théorème de Gauss affirme $Q_S = -\epsilon_{Si}\phi'(0)$ puisque $\vec{E} = -\text{grad}\phi = -\phi'(z)\vec{e}_z$; $\phi'(z) > 0$ puisque ϕ croît d'une valeur négative vers sa limite 0 atteinte en $z \rightarrow \infty$ au niveau de la base, permettant d'écrire, au moyen des notations de l'énoncé, $\phi'(0)^2 = 2\frac{V_T^2}{L^2} [\exp(u) - (1+u)]$ donc $Q_S = -\sqrt{2}\frac{\epsilon_{Si}V_T}{L} \sqrt{\exp(u) - (1+u)}$. La neutralité électrique de la zone oxydée, qui forme un condensateur, permet d'affirmer que $Q_G = -Q_S$

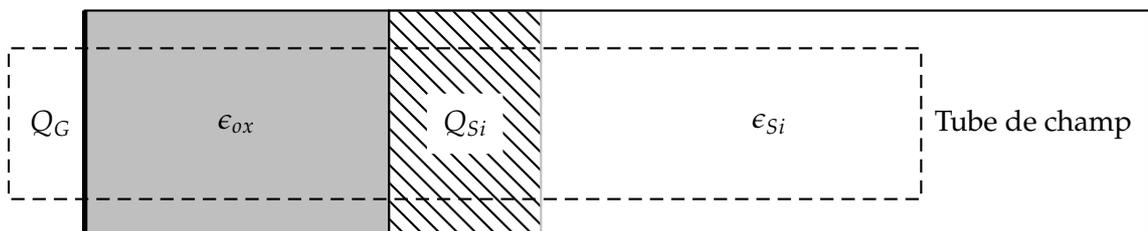
(II.2.8) u reste ici faible donc $\exp(u) \simeq 1 + u + \frac{u^2}{2}$ et $Q_G = \frac{\epsilon_{Si}V_T u}{L}$ donc $Q_G = -\frac{\epsilon_{Si}}{L}\phi(0)$ avec donc $C_{Si} = \frac{\epsilon_{Si}}{L}$. L'association des deux condensateurs (zone isolante oxydée et zone silicium) en série mène à $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{ox}} + \frac{1}{C_{Si}}$ ou $C = \frac{\epsilon_{ox}\epsilon_{Si}}{\epsilon_{ox}L + \epsilon_{Si}d}$.

(II.2.9) Sans difficulté, $C_{ox} = 8,85 \times 10^{-4} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $L = 13,1 \text{ nm}$ donc $C_{Si} = 8,08 \times 10^{-3} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. On a aussi $C_{Si}\phi(0) = CV_{GB}$ donc $V_{GB} = \phi(0) \left(1 + \frac{C_{Si}}{C_{ox}}\right)$ qui s'écrit encore $V_{GB} = -uV_T \left(1 + \frac{C_{Si}}{C_{ox}}\right)$; $V_{GB} = -0,26 \text{ V}$ pour $u = 1$, $V_{GB} = -0,79 \text{ V}$ pour $u = 2$ et $V_{GB} = -1,32 \text{ V}$ pour $u = 5$.

II.3. Distribution de charges dans le silicium pour $V_{GB} > 0$. Déplétion.

(II.3.1) On a maintenant $\phi''(z) = \frac{N_a e}{\epsilon_{Si}}$ pour $0 \leq z \leq z_D$ et $\phi''(z) = 0$ pour $z > z_D$. Dans ce second cas, l'intégration est immédiate et fournit une fonction affine, avec $\phi(B) = 0$ et, la base B étant suffisamment loin de l'interface, on admet encore $\phi'(B) = 0$ pour trouver $\phi(z) = 0$ pour $z \geq z_D$. L'intégration pour $z \leq z_D$ fournit d'abord $\phi'(z) = \frac{N_a e}{\epsilon_{Si}}(z - z_D)$ (continuité du champ $-\phi'(z)$ en $z = z_D$ en l'absence de charges surfaciques) puis $\phi(z) = \frac{N_a e}{2\epsilon_{Si}}(z - z_D)^2$ pour $0 \leq z \leq z_D$ (continuité du potentiel)

(II.3.2) Puisque $\rho = -N_a e$ sur une épaisseur z_D , on a bien sûr $Q_{Si} = -N_a e z_D$. On applique ici encore le théorème de Gauss à un tube de champ comportant la charge Q_G et la charge Q_{Si} , tube qui s'étend de $z < -d$ à $z > z_S$. Le flux du champ \vec{E} reste nul à travers un tel tube.



On en déduit que $Q_G = -Q_{Si}$ mais $Q_G = \frac{\epsilon_{ox} V_{ox}}{d}$ donc $V_{ox} = \frac{N_a e d z_D}{\epsilon_{ox}}$.

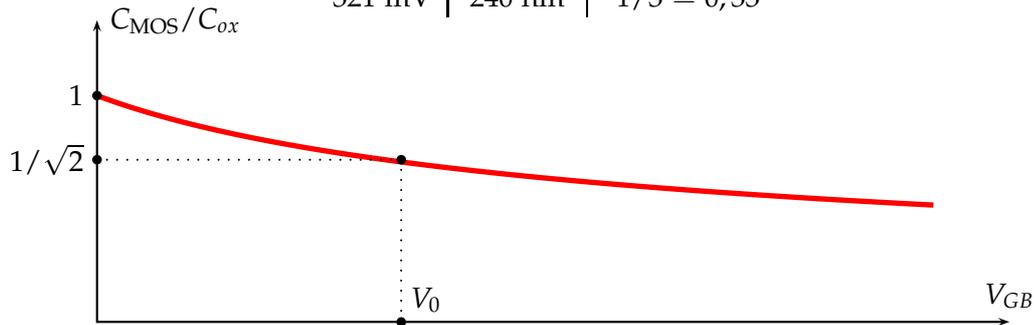
(II.3.3) $V_{GB} = V_{ox} + \phi(0) = \frac{N_a e d z_D}{\epsilon_{ox}} + \frac{N_a e z_D^2}{2 \epsilon_{Si}}$ peut être considéré comme une équation du second degré pour z_D , qu'on écrit aussi $z_D^2 + 2 \frac{\epsilon_{Si}}{\epsilon_{ox}} d z_D - \frac{2 \epsilon_{Si} V_{GB}}{N_a e} = 0$. Cette équation a toujours deux solutions de signe contraire et on ne conserve que la solution positive, $z_D = -\frac{\epsilon_{Si}}{\epsilon_{ox}} d + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{Si}}{\epsilon_{ox}} d\right)^2 + \frac{2 \epsilon_{Si} V_{GB}}{N_a e}}$ qui prend bien la forme demandée, à condition de poser $V_0 = \frac{N_a e \epsilon_{Si}}{2 C_{ox}^2}$.

(II.3.4) Après substitution, $Q = -N_a e \frac{\epsilon_{Si}}{\epsilon_{ox}} d \left[\sqrt{1 + \frac{V_{GB}}{V_0}} - 1 \right]$ donc $C_{MOS} = \frac{dQ}{dV_{GB}} = -\frac{N_a e \epsilon_{Si} d}{\epsilon_{ox} V_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{V_{GB}}{V_0}}}$ ou

$$C_{MOS} = \frac{C_{ox}}{\sqrt{1 + \frac{V_{GB}}{V_0}}}$$

(II.3.5) $V_0 = \frac{e N_a \epsilon_{Si} d^2}{2 \epsilon_{ox}^2}$ donc $V_0 = 40,2 \times 10^{-3} \text{ V}$. On a alors le tableau des valeurs et la courbe de variation de la page ci-après.

V_{GB}	z_D	C_{MOS}/C_{ox}
40 mV	49,7 nm	$1/\sqrt{2} \simeq 0,71$
120 mV	120 nm	$1/2 = 0,50$
321 mV	240 nm	$1/3 = 0,33$



On peut donc utiliser ce circuit comme une **capacité variable** (varicap) permettant de réaliser par exemple un oscillateur à fréquence propre contrôlé électriquement (pour la modulation de fréquence).

II.4. Distribution de charges dans le silicium toujours avec $V_{GB} > 0$. Régime d'inversion.

(II.4.1) On reconnaît ici encore une distribution statistique proportionnelle au **facteur de Boltzmann** $\exp(-E/k_B T)$ avec pour énergie potentielle des électrons $E = -e\phi(z)$, d'où la première forme $n(z) = n(B) \exp\left(\frac{e\phi(z)}{k_B T}\right)$ avec $\phi = 0$ au niveau de la base B . De plus, $n(B) = \frac{n_i^2}{N_a}$ dans l'approximation où $p(B) \simeq N_a$ (cf. plus haut). Cette densité électronique est maximale là où $\phi(z)$ est maximale donc en $z = 0$.

(II.4.2) a. Il faut imposer $\frac{n_i^2}{N_a} \exp\left(\frac{\phi_S}{V_T}\right) = N_a$ donc $\phi_S = 2V_T \ln \frac{N_a}{n_i}$.

b. $\phi(z) = \frac{e N_a}{2 \epsilon_{Si}} (z - z_D)^2$ et $\phi(0) = \phi_S$ imposent $z_D = z_S$ avec $z_S = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_{Si} V_T}{N_a e} \ln \frac{N_a}{n_i}}$.

c. On trouve $\phi_S = 0,838 \text{ V}$ et $z_S = 105,5 \text{ nm}$.

d. $z_S = \frac{\epsilon_{Si}}{\epsilon_{ox}} d \left[\sqrt{1 + \frac{V_{GB}}{V_0}} - 1 \right]$ donc $V_{GB} = V_0 \left[\left(1 + \frac{\epsilon_{ox} z_S}{\epsilon_{Si} d} \right)^2 - 1 \right] = 101 \text{ mV}$.

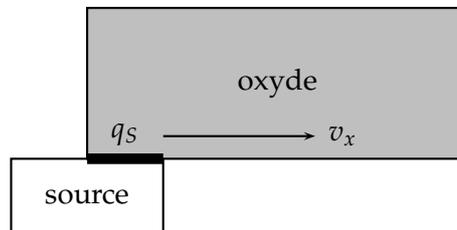
(II.4.3) a. Il suffit de reprendre le raisonnement fait plus haut en tenant compte de la charge supplémentaire $-q_S$ au niveau de la surface $z = 0$. Lorsque $V_{GB} = V_S$, on a vu que la grille portait la charge $Q = C_{ox}(V_S - \phi_S)$, le silicium portant (en volume entre $z = 0$ et $z = z_S$) la charge $-Q$. Lorsque $V_{GB} > V_S$, il apparaît une charge $-q_S$ au niveau de la surface de contact en $z = 0$, donc la grille porte la charge $Q + q_S$, ce qui permet d'écrire $Q + q_S = C_{ox}(V_{GB} - \phi_S)$. La comparaison des deux résultats montre que $q_S = C_{ox}(V_{GB} - V_S)$.

b. On pose $C_{MOS} = \frac{dQ'}{dV_{GB}}$ où la nouvelle charge Q' portée par la grille peut s'écrire $Q' = Q + q_S$ donc $Q' = C_{ox}(V_{GB} - \phi_S)$; la valeur de ϕ_S étant supposée inchangée, on aura toujours

$$C_{MOS} = \frac{C_{ox}}{\sqrt{1 + \frac{V_{GB}}{V_0}}}$$

II.5. Courant transversal dans une structure MOS.

(II.5.1) La figure ci-après présente le déplacement des charges formées à l'interface source-oxyde; pendant la durée dt , les charges de surface de densité surfacique q_S avancent de $v_x dt$ et la quantité de charge qui se déplace dans le sens de l'axe (Ox) est $dq = q_S \times v_x dt \times W$, ce qui permet d'écrire $I_x = v_x W q_S$ donc $I_x = -\mu_{mob} E_x W q_S$.



(II.5.2) Il vient enfin $I_x = -\mu_{mob} \frac{V_{SD}}{L} W C_{ox} (V_{GB} - V_S)$; avec $V_{DS} = -V_{SD}$, il vient pour conductance apparente entre drain et source $G_c = \frac{\mu_{mob} W C_{ox}}{L} (V_{GB} - V_S)$, pour $V_{GB} \geq V_S$. Le dispositif est donc un interrupteur commandé, puisqu'on peut en faire passer la conductance apparente de zéro à une valeur élevée en contrôlant la tension de commande V_{GB} : c'est une des applications du transistor à effet de champ (FET).

