Centrale PSI 2
Représentation connaissant les distances mutuelles

Remarques préliminaires.

Dans tout le corrigé, on identifiera $\mathbb{R}^p$ et l'espace $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Si $X, Y \in \mathbb{R}^p$, on a alors

$$\langle X, y\rangle = {}^tXY$$

On remarque aussi que

$${}^tZZ = n$$

en identifiant les éléments de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à des éléments de $\mathbb{R}$.
Enfin, on utilisera le fait que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geq 0$$

Il existe P orthogonale telle que $P^{-1}SP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$ avec $\forall i,\ \lambda_i \geq 0$. On a alors ${}^tXSX = {}^t(P^{-1}X)D(P^{-1}X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (P^{-1}X)_i^2 \geq 0$.

1 Centrage de matrices.

I.A. On remarque que $J^2 = Z({}^tZZ){}^tZ = nZ^tZ = nJ$ et donc

$$P^2 = I_n + \frac{1}{n^2}J^2 - \frac{2}{n}J = I_n - \frac{1}{n}J = P$$

π est donc un projecteur. De plus, pour tout vecteur X orthogonal à Z, on a $PX = X - \frac{1}{n}Z^tZX = X$ et donc $\mathrm{Vect}(Z)^\perp \subset \mathrm{Im}(\pi)$. De même, $PZ = Z - \frac{1}{n}Z^tZZ = 0$ et donc $\mathrm{Vect}(Z) \subset \ker(\pi)$. $\mathrm{Vect}(Z)$ et $\mathrm{Vect}(Z)^\perp$ étant supplémentaires orthogonaux, on en déduit par dimension et théorème du rang que

$$\mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Vect}(Z)^\perp \quad \text{et} \quad \ker(\pi) = \mathrm{Vect}(Z)$$

π est finalement le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(Z)^\perp$.

I.B.1 On a

$$\forall M,\ \Phi(\Phi(M)) = P\Phi(M)P = P^2MP = PMP = \Phi(M)$$

et Φ est donc un projecteur. De plus,

$$\forall M, N,\ (\Phi(M)|N) = \mathrm{Tr}({}^tP^tM^tPN) = \mathrm{Tr}(P^tMPN) = \mathrm{Tr}({}^tMPNP) = (M|\Phi(N))$$

(on a utilisé la propriété $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$). Φ est donc autoadjoint.
Φ est ainsi un projecteur autoadjoint et donc un projecteur orthogonal.
Pour mémoire, si $A \in \ker(\Phi)$ et $B = \Phi(M) \in \mathrm{Im}(\Phi)$, on a $(A|B) = (A|\Phi(M)) = (\Phi(A)|M) = 0$ ce qui montre que l'image et le noyau de Φ sont orthogonaux.

I.B.2 Procédons par double inclusion.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MZ = {}^tMZ = 0$. On a alors

$$\Phi(M)Z = PMPZ = 0 = MZ$$

Par ailleurs, $\langle MX, Z\rangle = \langle X, {}^tMZ\rangle = 0$ et donc $MX \in \mathrm{Vect}(Z)^\perp$. Comme π agit comme l'identité sur $\mathrm{Vect}(Z)^\perp$, on a donc aussi

$$\forall X \in \mathrm{Vect}(Z)^\perp,\ \Phi(M)X = PMPX = PMX = MX$$

Les endomorphismes canoniquement associés à $\Phi(M)$ et M agissent de la même façon sur deux supplémentaires et sont donc égaux. On en déduit que $M = \Phi(M)$ c'est à dire que $M \in \mathrm{Im}(\Phi)$.

- Supposons que $M \in \text{Im}(\Phi)$. On a alors $PMP = M$ et donc

$$MZ = PMPZ = PM0 = 0$$

$$^tMZ = {}^tP^tM^tPZ = P^tMPZ = P^tM0 = 0$$

On a ainsi montré que

$$\text{Im}(\Phi) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/\ MZ = {}^tMZ = 0\}$$

I.C. On a

$$\Phi(M) = PMP = M - \frac{1}{n}(MJ + JM) + \frac{1}{n^2}JMJ$$

Comme $JMJ = Z^tZMZ^tZ = ({}^tZMZ)Z^tZ$ (car ${}^tZMZ$ est un scalaire), $MJ = MZ^tZ$ et $JM = Z^tZM = Z^tZ^tM$ (M est symétrique) on a donc

$$\Phi(M) = M - \frac{1}{n}(MZ^tZ + Z^tZ^tM) + \frac{{}^tZMZ}{n^2}Z^tZ$$

ce qui s'écrit aussi

$$\Phi(M) = M - \frac{1}{n}(S(M)^tZ + Z^tS(M)) + \frac{\sigma(M)}{n^2}J$$

2 Produit scalaire à partir des distances mutuelles (relation de Torgerson).

II.A. On a $m_{i,j} = \|U_i\|^2 + \|U_j\|^2 - 2^tU_iU_j$ ce qui permet d'écrire que

$$M = N^tZ + Z^tN - 2^tUU \quad \text{où} \quad N = \begin{pmatrix} \|U_1\|^2 \\ \vdots \\ \|U_n\|^2 \end{pmatrix}$$

Comme $PZ = 0$ et ${}^tZP = {}^tZ^tP = {}^t(PZ) = 0$, on a alors

$$PMP = -2P^tUUP = -2^t(UP)(UP)$$

Or, $UP = U - \frac{1}{n}UJ = U$ car de $\sum_{i=1}^n U_i = 0$ on tire $UJ = 0$. Ainsi

$$\Phi(M) = -2^tUU$$

II.B. La formule de **I.C** appliquée à la matrice symétrique M donne alors

$$^tU_iU_j = \left({}^tUU\right)_{i,j} = -\frac{1}{2}(\Phi(M))_{i,j} = -\frac{1}{2}(m_{i,j} + \alpha_{i,j})$$

où $\alpha_{i,j} = -\frac{1}{n}((S(M)^tZ)_{i,j} + (Z^tS(M))_{i,j}) + \frac{\sigma(M)}{n^2}J_{i,j} = -\frac{1}{n}(S(M)_i + S(M)_j) + \frac{\sigma(M)}{n^2}$.

3 Condition pour qu'une matrice soit une matrice de distances mutuelles au carré.

III.A.1 D'après le calcul de **II.A** on a $\Phi(M) = -2^t(UP)(UP)$ qui est une matrice symétrique réelle et a donc toutes ses valeurs propres réelles. Soit λ une telle valeur propre et X vecteur propre associé. On a

$$\lambda\|X\|^2 = \langle \lambda X, X\rangle = \langle \Phi(M)X, X\rangle = -2^tX^t(UP)(UP)X = -2\|UPX\|^2 \leq 0$$

et comme $\|X\|^2 > 0$ (X est non nul puisque vecteur propre) on en déduit que $\lambda \leq 0$. On a ainsi

$$\text{Sp}(\Phi(M)) \subset \mathbb{R}^-$$

III.A.2 Avec l'hypothèse de centrage, on a cette fois $\Phi(M) = -2^tUU$. Il est immédiat que $\ker(U) \subset \ker(\Phi(M))$. Réciproquement, si $X \in \ker(\Phi(M)$ alors $0 = {}^tX\Phi(M)X = -2^t(UX)(UX) = -2\|UX\|^2$ et donc $X \in \ker(U)$. On a prouvé l'égalité

$$\ker(\Phi(M)) = \ker(U)$$

Par théorème du rang, on en déduit que

$$\mathrm{rg}(U) = \mathrm{rg}(\Phi(M))$$

Comme U possède p lignes, son rang (qui est aussi celui des vecteurs lignes) est plus petit que p. On a donc

$$\mathrm{rg}(\Phi(M)) \leq p$$

III.B.1 $\Psi(M) = -\frac{1}{2}\Phi(M)$ est symétrique (car $\Phi(M) = PMP$ et M et P sont symétriques) à valeurs propres positives (les valeurs propres de λA sont égales à λ fois celles de A). C'est donc un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Notons $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ ses valeurs propres (positives). Par théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q telle que

$$\Psi(M) = Q^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)Q$$

On en déduit alors (Q étant orthogonale) que

$$\Psi(M) = {}^tVV \quad \text{avec} \quad V = \mathrm{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n})Q$$

r étant le rang de $\Psi(M)$, on a $\mu_{r+1} = \cdots = \mu_n = 0$ (on a ordonné les valeurs propres) et V peut s'écrire (par blocs) $V = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}$ où $U \in \mathcal{M}_{r,n}$. Un calcul par blocs montre que ${}^tVV = {}^tUU$. On a ainsi montré que

$$\exists\, U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R}) / \ \Phi(M) = {}^tUU$$

III.B.2 On a $\Phi(M) = PMP = -2^tUU$. Comme $PZ = 0$, on a donc ${}^tUUZ = 0$ et donc aussi ${}^tZ^tUUZ = 0$ soit $\|UZ\|^2 = 0$ et donc $UZ = 0$. Or, $UZ = \sum_{i=1}^n U_i$ et ainsi

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

La partie **II** indique alors que $\Psi(N) = {}^tUU$ ce qui, par choix de U, donne

$$\Psi(N) = \Psi(M)$$

D'après les relations de Torgerson, on a

$$\forall i, j,\ m_{i,j} - \frac{1}{n}(S(M)_i + S(M)_j) + \frac{\sigma(M)}{n^2} = n_{i,j} - \frac{1}{n}(S(N)_i + S(N)_j) + \frac{\sigma(N)}{n^2}$$

Comme $m_{i,i} = n_{i,i} = 0$, on a donc

$$\forall i,\ -\frac{2}{n}S(M)_i + \frac{\sigma(M)}{n^2} = -\frac{2}{n}S(N)_i + \frac{\sigma(N)}{n^2}$$

En sommant ces relations, on a alors $-\frac{\sigma(M)}{n} = -\frac{\sigma(N)}{n}$ et donc $\sigma(M) = \sigma(N)$. La relation précédente devient

$$\forall i,\ -\frac{2}{n}S(M)_i = -\frac{2}{n}S(N)_i$$

et on a $S(M)_i = S(N)_i$ pour tout i. Les relations de Torgerson donnent finalement $\forall i, j,\ m_{i,j} = n_{i,j}$ et on a prouvé que

$$M = N$$

Ainsi, M est une matrice de distances mutuelles au carré.

Remarque : on n'a bizarrement pas utilisé la positivité des coefficients $m_{i,j}$.

4 Etude d'un exemple dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

IV.A.1 Supposons les quatre points coplanaires. Dans le plan contenant les points, on choisit le repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$. On a donc $A = (0,0)$, $B = (1,0)$. Il existe θ tel que $D = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ (puisque $AD = 1$) et ϕ tel que $C = (1 + \cos(\phi), \sin(\phi))$ (puisque $BC = 1$). La condition $CD = 1$ impose alors $(1 + \cos(\pi) - \cos(\theta))^2 + (\sin(\phi) - \sin(\theta))^2 = 1$ c'est à dire $1 + \cos(\phi) - \cos(\theta) - \cos(\phi - \theta) = 0$. Avec les relations trigonométriques, on obtient $2\sin^2(\frac{\pi-\theta}{2}) - 2\sin(\frac{\phi+\theta}{2})\sin(\frac{\phi-\theta}{2}) = 0$ c'est à dire encore

$$\sin(\frac{\phi-\theta}{2})\left(\sin(\frac{\phi-\theta}{2}) - \sin(\frac{\phi+\theta}{2})\right) = 0$$

Ceci n'a lieu que si $\phi = \theta$ ou $\phi = \pi$ ou $\theta = 0$. Les deux derniers cas sont exclus car les points sont deux à deux distincts. Finalement, on a

$$D = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \text{ et } C = (1 + \cos(\theta), \sin(\theta))$$

et on a un parallélogramme. On a alors (identité du parallélogramme)

$$a^2 + b^2 = 4$$

IV.A.2

a. B étant à égale distance de A et C, il est dans le plan médiateur de ces points c'est à dire dans $I + \text{Vect}(\overrightarrow{AC})^\perp$. Le même raisonnement tient pour D. Tout point de la droite (BD) est donc aussi dans ce plan. C'est le cas pour J et on obtient que $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$.
De même, A est à égale de distance de B et D et il en est de même de C ce qui permet de montrer comme ci-dessus que $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BD}$.
Finalement, la droite IJ est perpendiculaire aux droites (AC) et (BD) (c'est la perpendiculaire commune).

b. Soit p la projection (affine) sur le plan $A + \text{Vect}(\overrightarrow{IJ})^\perp$ et P sa partie linéaire (qui est donc la projection vectorielle sur $\text{Vect}(\overrightarrow{IJ})^\perp$).
Comme $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JD}$ et $p(J) = J$, on a donc (en prenant l'image par P) $\overrightarrow{p(B)I} = \overrightarrow{Ip(D)}$ et I est le milieu de $[p(B)p(D)]$. Comme c'est aussi le milieu de $[AC]$, le quadrilatère $(A, p(B), C, p(D))$ est un parallélogramme. Comme $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$, on a aussi $p(B)p(D) = BD$. On a donc (avec l'inégalité du prallélogramme)

$$a^2 + b^2 = AC^2 + p(B)p(D)^2 = Ap(B) + p(B)C + cp(D) + p(D)A$$

Mais comme P est une projection orthogonale, elle contracte les distances et $ap(B) = p(A)p(B) = \|P(\overrightarrow{AB})\| \leq AB = 1$. On procède de même pour les quatre autres distances et on obtient $a^2 + b^2 \leq 4$. Comme soit B soit D n'est pas dans le plan ACI, l'une des inégalité précédente est stricte (par exemple, si c'est B alors $\|P(\overrightarrow{AB})\| < AB$). On a finalement

$$a^2 + b^2 < 4$$

IV.A.3 Posons $k = \frac{\sqrt{4-a^2-b^2}}{2}$ et $A = (-a/2, 0, 0)$, $C = (a/2, 0, 0)$, $B = (0, -b/2, k)$, $D = (0, b/2, k)$. On a alors quatre points distincts qui vérifient les conditions voulues.

IV.B.1 On a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & b^2 \\ a^2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & b^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ S(M) = \begin{pmatrix} 2+a^2 \\ 2+b^2 \\ 2+a^2 \\ 2+b^2 \end{pmatrix}, \ \sigma(M) = 8 + 2(a^2 + b^2)$$

IV.B.2 J'utilises l'expression de **I.C** pour obtenir

$$\Phi(M)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = -a^2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\ \Phi(M)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = -b^2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Phi(M)\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = (-2+\frac{a^2+b^2}{2})\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \Phi(M)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

Comme $\Psi = -\frac{1}{\Phi}$, on a donc

- $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ est vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre $a^2/2$.
- $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre $b^2/2$.
- $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre $1-\frac{a^2+b^2}{4}$.
- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre 0.

Enfin, les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ puis $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$ montrent que le déterminant des quatre vecteurs vaut $\begin{vmatrix}-2 & 2\\2 & 2\end{vmatrix} = -8 \neq 0$ ce qui indique que les vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$.

On a donc toutes les valeurs propres qui sont $0, a^2/2, b^2/2$ et $1-\frac{a^2+b^2}{4}$ (éventuellement, elles peuvent être égales).

IV.B.3 $\Psi(M)$ est semblable à $\mathrm{diag}(0, a^2/2, b^2/2, 1-\frac{a^2+b^2}{4})$. Comme $a, b > 0$, le rang de cette matrice est au moins égal à 2. Tout dépend de la nullité de $1-\frac{a^2+b^2}{4}$.

- Si $1-\frac{a^2+b^2}{4} \neq 0$, Ψ est de rang 3.
- Si $1-\frac{a^2+b^2}{4} = 0$, Ψ est de rang 2.

IV.B.4 Si les points sont coplanaires alors le rang de la matrice U est inférieur à 2 et il en est de même de celui de Φ (ou Ψ). Le rang de Ψ ne pouvant être égal à 3, on a

$$a^2 + b^2 = 4$$

IV.B.5 Φ étant à valeurs propres négatives, on a

$$a^2 + b^2 \leq 4$$

IV.B.6 On suppose maintenant que $a^2 + b^2 \leq 4$. On applique le procédé de **III.B** pour trouver les vecteurs U. On introduit donc une matrice orthogonale P diagonalisant $\Psi(M)$. Avec ce qui précède, on écrit

$$\Psi(M) = P\mathrm{diag}(a^2/2, b^2/2, 1-(a^2+b^2)/4, 0)P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1/2\\0 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\\-1/\sqrt{2} & 0 & -1/2 & 1/2\\0 & -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Il nous suffit alors de choisir pour U les lignes (en enlevant la dernière coordonnée) de $P = \text{diag}(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}, \sqrt{1-(a^2+b^2)/4}, 0)$. On choisit donc

$$U_1 = \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \\ -k/2 \end{pmatrix},\ U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ k/2 \end{pmatrix},\ U_3 = \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ -k/2 \end{pmatrix},\ U_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b/2 \\ k/2 \end{pmatrix} \text{ avec } k = \frac{\sqrt{4-a^2-b^2}}{2}$$

On retrouve le même exemple qu'en **IV.A**.

5 Cas où il n'existe pas de point représentant une matrice de distances mutuelles.

V.A.1

a. Soit $Q \in O_n(\mathbb{R})$ (${}^tQ = Q^{-1}$) et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors

$$\|{}^tQAQ\|^2 = \text{Tr}({}^tQ{}^tAQ{}^tQAQ) = \text{Tr}({}^tQ{}^tAAQ) = \|A\|^2$$

la dernière égalité provenant de l'invariance de la trace par similitude.

b. $\Psi(M)$ est symétrique réelle et le théorème spectral indique qu'il existe une matrice orthogonale Q_0 qui diagonalise $\Psi(M)$. On a alors ${}^tQ_0\Psi(M)Q_0 = Q_0^{-1}\Psi(M)Q_0$ qui est diagonale.

c. Soit $T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On a $\|\Psi(M) - T\| = \|{}^tQ_0(\Psi(M) - T)Q_0\| = \|D_0 - {}^tQ_0TQ_0\|$ où D_0 est la matrice diagonale ${}^tQ_0\Psi(M)Q_0$. On peut écrire ${}^tQ_0TQ_0 = D + E$ avec D diagonale et E à diagonale nulle et donc orthogonale à toute matrice diagonale. En posant $T' = Q_0D{}^tQ_0$, on a alors (on utilise Pythagore)

$$(*)\ :\ \|\Psi(M) - T'\|^2 = \|D_0 - D\|^2 \le \|D_0 - D\|^2 + \|E\|^2 = \|D_0 - (D+E)\|^2 = \|\Psi(M) - T\|^2$$

Par ailleurs, en notant $(X_1, \dots, X_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a (puisque T est dans $\mathcal{S}_n^+$) ${}^tX_i{}^tQ_0TQ_0X_i = {}^t(Q_0X_i)T(Q_0X_i) \ge 0$ (en utilisant une remarque préliminaire) et donc ${}^tX_i(D+E)X_i \ge 0$ ce qui donne $D_{i,i} = (D+E)_{i,i} \ge 0$. D étant diagonale à coefficients positifs, $T' = Q_0DQ_0^{-1}$ est à valeurs propres positives. C'est donc un élément de $\mathcal{S}_n^+$. $(*)$ indique alors que si $E \neq 0$ alors T ne mimise pas $\|\Psi(M) - U\|$ pour $U \in \mathcal{S}_n^+$.
En contraposant, on a montré que

$$\forall T_0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ \|\Psi(M) - T_0\| = \min_{T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})} \|\Psi(M) - T\| \Rightarrow {}^tQ_0T_0Q_0 \text{ est diagonale}$$

d. La question précédente nous montre qu'il nous suffit de nous restreindre au cas de matrices $T = Q_0DQ_0^{-1}$ avec D diagonale à coefficients positifs (pour rester dans $\mathcal{S}_n^+$). Notons $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de $\Psi(M)$. Il s'agit donc de minimiser pour $d_1, \dots, d_n \ge 0$ la quantité $\|\text{diag}(\mu_1 - d_1, \dots, \mu_n - d_n)\|$. Cette quantité vaut $\sqrt{(\mu_1-d_1)^2 + \dots + (\mu_n - d_n)^2}$ et il s'agit donc de minimiser chaque $(\mu_i - d_i)^2$. Il existe un unique choix minimisant cette quantité : $d_i = \mu_i$ si $\mu_i \ge 0$ et $d_i = 0$ sinon.
On a ainsi montré que

$$\exists\,! T_0 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) /\ \|\Psi(M) - T_0\| = \min_{T \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})} \|\Psi(M) - T\|$$

et on a donné un procédé pour obtenir T_0.

V.A

a. D'après la contruction précédente, le rang de T_0 (égal au nombre de d_i non nuls) est égal au nombre de valeurs propres > 0 de $\Psi(M)$ (comptées avec leurs multiplictés) et ce rang est plus petit que $n-1$ (il y a au moins une valeur propre < 0) et plus grand que 1 (on suppose $T_0 \neq 0$). Par ailleurs, la partie **III.A** indique que $p \ge \text{rg}(\Phi(M)) = \text{rg}(\Psi(M))$ et ce rang est égal au nombre de valeurs propres non nulles de $\Psi(M)$ (comptées avec leurs multiplictés). Ce nombre est plus grand que celui des valeurs propres > 0 et on a donc

$$p \geq \mathrm{rg}(T_0) \in [1..n-1]$$

b. On note r le rang de T_0. Quitte à changer l'ordre des colonnes de Q_0, il existe donc des réels $d_1, \dots, d_r > 0$ tels que ${}^tQ_0 T_0 Q_0 = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0) = D_1^2$ où on a posé $D_1 = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_r}, 0, \dots, 0)$. On a alors

$$T_0 = Q_0 D_1^2 ({}^tQ_0) = {}^t(D_1 Q_0^{-1})(D_1 Q_0^{-1})$$

Les $n-r$ dernières lignes de D_1 étant nulle, $D_1 Q_0^{-1}$ peut s'écrire, par blocs, $\begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $U \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs donne alors

$$T_0 = {}^tUU$$

c. En gardant les notation précédentes, on a $Q_0^{-1}\Psi(M)Q_0 = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et $Q_0^{-1}T_0Q_0 = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$. De la première relation, et comme $\Psi(M)Z = -\frac{1}{2}PMPZ = 0$, on tire que

$$\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)Q_0 Z = 0$$

c'est à dire que $\forall i,\ d_i(Q_0Z)_i = 0$. En particulier ($d_1, \dots, d_r$ sont > 0) on a les r premières coordonnées de Q_0Z qui sont nulles. Or, la seconde relation donne

$$Q_0^{-1}T_0Z = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)Q_0Z = \begin{pmatrix} d_1(Q_0Z)_i \\ \vdots \\ d_r(Q_0Z)_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi, $Q_0^{-1}T_0Z = 0$ ou encore $T_0Z = 0$ c'est à dire ${}^tUUZ = 0$ ce qui implique $\|UZ\|^2 = 0$ (multiplier à gauche par ${}^tZ$) ou encore $UZ = 0$. Ceci s'écrit exactement

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

d. D'après la partie **II.** on a $\Psi(\widetilde{M}) = {}^tUU$ et donc

$$\Psi(\widetilde{M}) = T_0$$

On a bien trouvé un p minimal (puisque le plus petit des p envisageable est le rang de T_0) pour lequel il existe une famille $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs centrés dont la matrice $\widetilde{M}$ des distances mutuelles vérifie $\Psi(\widetilde{M})$.

V.B.1 Pour toute matrice A on a $\Psi(A) = -\frac{1}{2}PAP$ et l'image de l'endomorphisme canoniquement associé à $\Psi(A)$ est incluse dans celle de π, c'est à dire dans $\mathrm{Vect}(Z)^{\perp} = \mathcal{H}$. A fortiori, $\mathcal{H}$ est stable par l'endomorphisme canoniquement associé à $\Psi(A)$.

V.B.2 On a immédiatement

$$N_k = M + k(J - I_n)$$

V.B.3 Comme $\Psi(J) = 0$ (car $\Phi(J) = 0$ car $PJ = 0$) et $\Psi(I_n) = -\frac{1}{2}P^2 = -\frac{1}{2}P$, on a donc

$$\Psi(N_k) = \Psi(M) + \frac{k}{2}P$$

Soit λ une valeur propre non nulle de $\Psi(N_k)$ et X un vecteur propre associé. $X = \frac{1}{\lambda}\Psi(N_k)X$ est dans l'image de $\Psi(N_k)$ et donc dans $\mathrm{Vect}(Z)^{\perp}$. On a alors $PX = X$ et donc $\Psi(M)X = (\lambda - \frac{k}{2})X$. $\lambda - k/2$ est donc valeur propre de $\Psi(M)$.
De même, si μ est valeur propre non nulle de $\Psi(M)$ alors $\mu + \frac{k}{2}$ est valeur propre de $\Psi(N_k)$.

- Si $\Psi(N_k)$ est à valeurs propres positives, alors toute valeur propre non nulle de $\Psi(M)$ est plus grande que $-\frac{k}{2}$. On doit donc avoir

$$k \geq -2\min(\mathrm{Sp}(\Psi(M))) = k_0$$

- Réciproquement, pour toute valeur propre non nulle λ de $\Psi(N_{k_0})$, on a $\lambda - k_0/2$ dans le spectre de $\Psi(M)$ et donc $-\frac{k_0}{2} \leq \lambda - k_0/2$. $\Psi(N_{k_0})$ est alors à valeurs propres positive

Il existe un réel k_0 minimal qui est

$$k_0 = -2\min(\mathrm{Sp}(\Psi(M)))$$

V.C.1 On a $(M_c)_{i,j} = M_{i,j} + 2cd_{i,j}\zeta_i^j + c^2(\zeta_i^j)^2$ et commme $d_{i,j}\zeta_i^j = d_{i,j}$ (car $d_{i,i} = 0$) et que $(\zeta_i^j)^2 = \zeta_i^j$, on a donc

$$M_c = M + 2cD + c^2(J - I_n)$$

Φ étant linéaire (et en utilisant $\Phi(J) = 0$ et $\Phi(I_n) = P$)

$$\Phi(M_c) = \Phi(M) + 2c\Phi(D) + c^2(\Phi(J) - \Phi(I_n)) = \Phi(M) + 2c\Phi(D) - c^2P$$

Il reste à composer par ${}^tX$ à gauche et X à droite et à utiliser $\Psi = -\frac{1}{2}\Phi$ pour en déduire

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tX\Psi(M_c)X = {}^tX\Psi(M)X + 2c\,{}^tX\Psi(D)X + \frac{c^2}{2}{}^tXPX$$

V.C.2 $\Psi(M) = -\frac{1}{2}\Phi(M)$ est symétrique. Notons $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ ses valeurs propres. Par théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q telle que

$$\Psi(M) = Q^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)Q$$

Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a ${}^tX\Psi(M)X = {}^t(QX)\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)QX = \sum_{i=1}^n \mu_i(QX)_i^2 \geq \lambda_{min}\|QX\|^2$ et, Q étant orthogonale, $\|QX\| = \|X\|$. Finalement,

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tX\Psi(M)X \geq \lambda_{min}{}^tXX$$

Le raisonnement est exactement le même pour obtenir

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tX\Psi(M)X \geq \mu_{min}{}^tXX$$

V.C.3 Soit λ une valeur propre non nulle de $\Psi(M_c)$ et X un vecteur propre associé. On a alors $X = \frac{1}{\lambda}\Psi(M_c)X \in \mathcal{H}$ et donc $PX = X$. Ainsi, avec la question **V.C.1**

$$\lambda\|X\|^2 = {}^tX\Psi(M_c)X = {}^tX\Psi(M)X + 2c\,{}^tX\Psi(D)X + \frac{c^2}{2}{}^tXX$$

Avec la question précédente, on en déduit que

$$\lambda\|X\|^2 \geq (\lambda_{min} + 2c\mu_{min} + \frac{c^2}{2})\|X\|^2$$

$\lambda_{min} + 2c\mu_{min} + \frac{c^2}{2}$ est un polynôme de degré 2 en c dont la plus grande racine est $\tilde{c}$ (qui est > 0 car $\lambda_{min} < 0$ car on a supposé que $\Psi(M)$ a au moins une valeur propre < 0). Pour $c = \tilde{c}$, la valeur prise par le polynôme est nul et donc $\lambda \geq 0$.

$$\text{Si } c = \tilde{c} \text{ alors } \mathrm{Sp}(\Psi(M_c)) \subset \mathbb{R}^+$$

Si $c > \tilde{c}$ alors la valeur prise par le polynôme est > 0. Le même calcul donne, pour tout $X \in \mathcal{H}$, ${}^tX\Psi(M_c)X \geq (\lambda_{min} + 2c\mu_{min} + \frac{c^2}{2})\|X\|^2$ qui est > 0 pour X non nul/

$$\text{Si } c > \tilde{c} \text{ alors } \forall X \in \mathcal{H} \setminus \{0\},\ {}^tX\Psi(M_c)X > 0$$

V.C.4 L'ensemble $\mathcal{A}$ est borné car inclus dans la sphère unité. Il est aussi fermé comme intersection de deux fermés (la sphère unité et l'image réciproque de $\mathbb{R}^{+*}$ par l'application continue $X \mapsto -2{}^tX\Psi(D)X + \sqrt{4({}^tX\Psi(D)X)^2 - 2{}^tX\Psi(M)X}$). C'est donc un compact. Comme α est une application continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur ce compact et

$$\exists\, X^* \in \mathcal{A}/\ \alpha(X^*) = \max_{X \in \mathcal{A}} \alpha(X)$$

Pour $X \in \mathcal{A}$, $\alpha(X)$ correspond au plus grand des zéros de $c \mapsto {}^tX\Psi(M)X + 2c{}^tX\Psi(D)X + \frac{c^2}{2}$. Pour $c \geq \alpha(X)$, on a donc ${}^tX\Psi(M)X + 2c{}^tX\Psi(D)X + \frac{c^2}{2} \geq 0$.
Si, par l'absurde, $\alpha(X^*) \leq 0$ alors $\forall X \in \mathcal{A},\ \alpha(X) \leq 0$ et donc

$$\forall c \geq 0,\ \forall X \in \mathcal{A},\ {}^tX\Psi(M)X + 2c{}^tX\Psi(D)X + \frac{c^2}{2} \geq 0$$

Si $\|X\| = 1,\ X \in \mathcal{H}$ et $4({}^tX\Psi(D)X)^2 - 2{}^tX\Psi(M)X < 0$ alors le discriminant du trinôme du second degré ci-dessus est strictement négatif et ce trinôme ne s'annule pas et reste positif. L'inégalité reste donc vraie pour ces X. Finalement, avec la question **V.C.1** (pour $X \in \mathcal{H},\ {}^tXPX = \|X\|^2$) on a

$$\forall c \geq 0,\ \forall X \in \mathcal{H} \ \text{ avec } \ \|X\| = 1,\ {}^tX\Psi(M_c)X \geq 0$$

Or, on sait que $\Psi(M)$ admet une valeur propre strictement négative λ. Soit X un vecteur propre associé. Il est dans $\mathcal{H}$ (car $X = \frac{1}{\lambda}\Psi(M)X$) et, quitte à le normer, on peut le supposer de norme 1. Pour ce X, on a $\lambda = {}^tX\Psi(M_c)X \geq 0$ ce qui est une contradiction avec $\lambda < 0$. On a donc

$$\alpha^* = \alpha(X^*) > 0$$

V.C.5 α^* est un zéro du trinôme ${}^tX^*\Psi(M)X^* + 2c{}^tX^*\Psi(D)X^* + \frac{c^2}{2}$ et avec la question **V.C.1** (comme ci-dessus) on a

$${}^tX^*\Psi(M_{\alpha^*})X^* = 0$$

Pour tout $X \in \mathcal{A}$, $\alpha(X) \leq \alpha^*$ et en α^* le trinôme ${}^tX\Psi(M)X + 2c{}^tX\Psi(D)X + \frac{c^2}{2}$ est positif (comme expliqué en **C.4.**). Ceci reste vrai pour $X \in \mathcal{H}$ avec $\|X\| = 1$ (voir ci-dessus) et donc (toujours avec **C.1**)

$$\forall X \in \mathcal{H} \ \text{ avec } \ \|X\| = 1,\ {}^tX\Psi(M_{\alpha^*})X \geq 0$$

En prenant une valeur propre λ non nulle de $\Psi(M_{\alpha^*})$, on trouve un vecteur propre normé correspondant qui est dans $\mathcal{H}$ et on obtient $\lambda = {}^tX\Psi(M_{\alpha^*})X \geq 0$ (même raisonnement qu'en **C.4**). On a donc

$$\mathrm{Sp}(\Psi(M_{\alpha^*})) \subset \mathbb{R}^+$$

Si $c > \alpha^*$ alors $\forall X \in \mathcal{A},\ c > \alpha(X)$ et ${}^tX\Psi(M)X + 2c{}^tX\Psi(D)X + \frac{c^2}{2} > 0$ et ceci reste vrai pour $X \in \mathcal{H}$ avec $\|X\| = 1$ (toujours le même raisonnement). Ceci reste vrai pour kX avec $k \neq 0$ et $X \in \mathcal{H}$ de norme 1 donc vrai pour tout X non nul de $\mathcal{H}$. On a donc

$$\forall c > \alpha^*,\ \forall X \in \mathcal{H} \setminus \{0\},\ {}^tX\Psi(M_c)X > 0$$

α^* est donc une constante convenable et donc $c^* \leq \alpha^*$. Si l'inégalité était stricte, on ne pourrait avoir ${}^tX^*\Psi(M_{\alpha^*})X^* = 0$ (la quantité serait > 0 par définition de c^*). On a donc

$$c^* = \alpha^*$$

V.C.6

a. $\Psi(M_{c^*})$ est symétrique réelle et il existe donc une base orthonormée $(X_1, \dots, X_n)$ de diagonalisation. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondante. En notant x_i^* les coordonnées de X^* sur cette base, on a

$$0 = {}^tX^*\Psi(M_{c^*})X^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^*)^2$$

Les λ_i étant positifs, ceci implique que $\forall i,\ \lambda_i(x_i^*)^2 = 0$. Ainsi, on a $x_i^* = 0$ dès que $\lambda_i \neq 0$. Les seules coordonnées de X^* qui peuvent être non nulles correspondent à des X_i dans le noyau de $\Psi(M_{c^*})$. X^* est donc dans ce noyau :

$$\Psi(M^*)X^* = 0$$

b. Un calcul par blocs donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Psi(M)X^* \\ -Y^* - 4\Psi(D)X^* \end{pmatrix} = c^* \begin{pmatrix} Y^* \\ -\frac{2}{c^*}\Psi(M)X^* - 4\Psi(D)X^* \end{pmatrix}$$

Le même calcul qu'en **C.1** donne $\Psi(M_c)X = \Psi(M)X + 2c\Psi(D)X + \frac{c^2}{2}PX$. En appliquant ceci avec X^* et c^*, on a alors $0 = \Psi(M)X^* + 2c^*\Psi(D)X^* + \frac{(c^*)^2}{2}X^*$ ce qui permet de montrer que

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\Psi(M) \\ -I_n & -4\Psi(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix} = c^* \begin{pmatrix} Y^* \\ X^* \end{pmatrix}$$

V.C.7

a. En traduisant le fait que (X_1, X_2) est vecteur propre, on obtient $\left\{ \begin{array}{l} 2\Psi(M)X_2 = \gamma X_1 \\ -X_1 - 4\Psi(D)X_2 = \gamma X_2 \end{array} \right)\}$.
La seconde équation permet d'exprimer X_1 en fonction de X_2. En injectant dans la première équation, on obtient

$$\Psi(M)X_2 + 2\gamma\Psi(D)X_2 + \frac{\gamma^2}{2}X_2 = 0$$

Il suffit d'utiliser le calcul de **C.1** pour en déduire

$${}^tX_2\Psi(M_\gamma)X_2 = 0$$

Par ailleurs, si $X_2 = 0$ alors la seconde équation donne $X_1 = 0$ ce qui est exclus (un vecteur propre n'est pas nul). On a donc

$$X_2 \neq 0$$

Si $\gamma = 0$ alors $\gamma \leq c^*$. Sinon, la première équation donne $X_1 \in \mathcal{H}$ (l'image de $\Psi(A)$ est incluse dans $\mathcal{H}$ pour tout A) puis la seconde équation donne $X_2 \in \mathcal{H}$. Comme X_2 est non nul dans $\mathcal{H}$ et vérifie ${}^tX_2\Psi(M_\gamma)X_2 = 0$ alors $\gamma \leq c^*$ par définition de c^*. On a donc toujours

$$\gamma \leq c^*$$

b. c^* est ainsi la plus grande valeur propre de la matrice par bloc proposée.