Centrale PSI 1
un corrigé

1 La fonction Γ.

I.A. $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$; les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

- Au voisinage de 0, $f_x(t) \sim t^{x-1}$ est intégrable si et seulement si $1-x<1$ (fonctions de Riemann).
- Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) = o(1/t^2)$ (croissances comparées) et f_x est donc intégrable.

Finalement f_x est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $x>0$.

I.B. Soit $h : (x,t) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$; h est continue sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$ et admet sur cet ensemble une dérivée partielle par rapport à x qui est aussi continue. Enfin,

$$\forall 0<a<b,\ \forall x\in[a,b],\ \forall t>0,\ |h(x,t)| \le \phi_0(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t\in[0,1] \\ e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t>1 \end{cases}$$

$$\forall 0<a<b,\ \forall x\in[a,b],\ \forall t>0,\ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \le \phi_1(t) = \begin{cases} |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t\in[0,1] \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t>1 \end{cases}$$

ϕ_0 et ϕ_1 étant intégrables sur $\mathbb{R}^+$ (négligeables devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ et devant $t^{\frac{a}{2}-1}$ au voisinage de 0 par croissances comparées et continues par morceaux ailleurs), le théorème sur les intégrales à paramètres indique que $\Gamma\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ avec

$$\forall x>0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

Par ailleurs, la fonction intégrée étant positive, continue et non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a aussi

$$\forall x>0,\ \Gamma(x)>0$$

I.C. Soit $x>0$. Pour $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$, une intégration par parties donne

$$\int_a^b e^{-t}t^x\,dt = \left[-e^{-t}t^x\right]_a^b + x\int_a^b e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers l'infini (les différentes limites existent bien) on a donc

$$\forall x>0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

I.D. Un calcul direct donne :

$$\Gamma(1) = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

La formule de la question précédente donne alors directement par récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$$

2 Formule de Stirling.

II.A. On dérive $(t-k+1)(k-t)$ en $2k-1-2t$ et on primitive $1/t^2$ en $-1/t$ pour obtenir, par intégration par parties,

$$\int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\,dt = \int_{k-1}^k \frac{2k-1-2t}{t}\,dt$$

Une nouvelle intégration par parties donne (on dérive $2k-1-2t$ en -2 et on primitive $1/t$ en $\ln(t)$)

$$\begin{aligned}\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\,dt &= [\ln(t)(2k-1-2t)]_{k-1}^{k} + 2\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,dt \\ &= -\ln(k) - \ln(k-1) + 2\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,dt\end{aligned}$$

En réordonnant cette égalité, il vient

$$u_k = \ln(k) - \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,dt = \frac{1}{2}(\ln(k) - \ln(k-1)) - \int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2}\,dt$$

II.B. On remarque que

$$\forall t \in [k-1,k],\ 0 \le \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} \le \frac{1}{t^2} \le \frac{1}{(k-1)^2}$$

On en déduit par positivité de l'intégrale que

$$\forall k \ge 2,\ 0 \le w_k \le \frac{1}{2(k-1)^2}$$

Par comparaison des séries positives, $\sum(w_k)_{k\ge 2}$ est une série positive convergente. Notons S sa somme.
Avec l'identité de la question précédente, on a

$$\sum_{k=2}^{n} w_k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(\ln(k) - \ln(k-1)) - \sum_{k=2}^{n}\ln(k) + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \ln(t)\,dt$$

Par télescopage, relation de Chasles et propriété de morphisme du logarithme, ceci devient

$$\sum_{k=2}^{n} w_k = \frac{1}{2}(\ln(n+1) - \ln(1)) - \ln(n!) + \int_{1}^{n} \ln(t)\,dt = \frac{\ln(n)}{2} - \ln(n!) + n\ln(n) - n + 1$$

ce qui s'écrit aussi

$$S - v_n = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} - \ln(n!) + 1$$

ou encore

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + a + v_n \ \text{ avec }\ a = 1 - S = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} w_k$$

II.C. En posant $u = t-k+1$ (on pourrait travailler avec les expressions initiales mais le calcul me parait plus clair avec des intégrale sentre 0 et 1), on a

$$w_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u(1-u)}{(u+k-1)^2}\,du$$

Une intégration par parties donne alors (on primitive le numérateur)

$$w_k = \frac{1}{12k^2} + \int_0^1 \frac{\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}}{(u+k-1)^2}\,du$$

et ainsi (on calcule l'intégrale et on soustrait)

$$w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{12k^2(k-1)} + \int_0^1 \frac{\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}}{(u+k-1)^2}\, du$$

Une étude élémentaire de fonction montre que $u \mapsto \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}$ croît sur $[0,1]$ et prend des valeurs entre 0 et $\frac{1}{12}$. On a donc

$$-\frac{1}{12k^2(k-1)} \le w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \le -\frac{1}{12k^2(k-1)} + \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^2}$$

Le majorant est plus petit que $\frac{1}{12}\int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^2}$ et donc que $\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{du}{(u+k-1)^2} = \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$.
On vérifie par ailleurs que

$$\frac{1}{6}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3} - \frac{1}{12k^2(k-1)} = \frac{1}{12k(k-1)^2} \ge 0$$

et le minorant plus haut est plus grand que $-\frac{1}{6}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$.
On a finalement montré que

$$\frac{1}{6}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3} \le w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \le \frac{1}{6}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3}$$

ce qui correspond au réultat demandé.

II.D. On remarque que pour $p \ge n+1 \ge 1$ on a

$$\sum_{k=n+1}^{p} \left(w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \right) = \sum_{k=n+1}^{p} w_k - \frac{1}{12}\int_n^p \frac{dt}{t^2} = \sum_{k=n+1}^{p} w_k + \frac{1}{12p} - \frac{1}{12n}$$

On passe au module et on utilise l'inégalité triangulaire et la question précédente pour en déduire que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} w_k - \frac{1}{12}\int_n^p \frac{dt}{t^2} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{p} \left(w_k - \frac{1}{12}\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \right) \right| \le \frac{1}{6}\int_n^p \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12p^2}$$

En passant à la limite quand $p \to +\infty$, on en déduit alors

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \le \frac{1}{12n^2}$$

On a ainsi $v_n = \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ce qui, injecté dans le résultat de **II.B** donne

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3 L'identité d'Euler.

III.A. f_n est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (le seul problème est en n où le raccord se fait bien, limite à droite et gauche valant 0), nulle au voisinage de $+\infty$ (où elle est donc intégrable) et équivalente à t^{x-1} en 0 (où elle est intégrable puisque $x > 0$). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III.B. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ (puisque l'on a $(1-u/n)^n = \exp(n\ln(1-u/n)) \to \exp(-u)$ quand $n \to +\infty$).
Les f_n ainsi que la limite simple sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Par concavité de ln, on a $\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$; on a donc (croissance de l'exponentielle)

$$\forall t \in]0, n[,\ 0 \leq f_n(t) \leq t^{x-1}e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leq t^{x-1}e^{-t}$$

et l'inégalité reste vraie trivialement pour $t \geq n$. Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (déjà vu) et le théorème de convergence dominée s'applique pour donner

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ dt = \Gamma(x)$$

III.C. Soit $a \in]0,1]$; une intégration par parties donne

$$\int_a^1 (1-u)^{n+1}u^{x-1}\ dx = \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^{n+1}\right]_a^1 + \frac{n+1}{x}\int_a^1 u^x(1-u)^n\ du$$

En passant à la limite $a \to 0$ (les différentes quantités existent ; en particulier, $x > 0$ donne $x - 1 > -1$ et on a l'intégrabilité au voisinage de 0)

$$J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}J_n(x+1)$$

III.D. On montre par récurrence que la propriété

$$\forall x > 0,\ J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}J_0(x+n)$$

est vraie pour tout $n \geq 1$.
- Initialisation : le résultat est vrai au rang 1 d'après la question précédente.
- Hérédité : supposons le résultat vrai au rang $n \geq 1$. En utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence au rang n avec $x+1$, on obtient le résultat au rang $n+1$.

Le calcul de J_0 étant immédiat, on trouve alors

$$J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

III.E. Le changement de variable $u = t/n$ donne

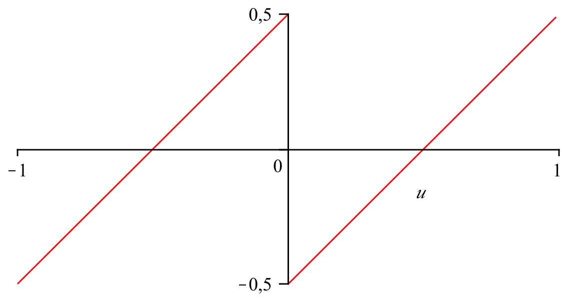
$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ dt = n^x\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\ du = \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

et la question **III.B** indique alors que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

4 Une intégrale à paramètres.

IV.A. Si $u \in [-1, 0[$ alors $h(u) = u + 1/2$, si $u \in [0, 1[$ alors $h(u) = u - 1/2$ et $h(1) = -1/2$. On a donc le graphe suivant



IV.B. h est, comme la fonction partie entière, 1-périodique. Son intégrale sur $[t, t+1]$ est donc indépendante de t et vaut 1 (calcul pour $t = 0$ par exemple). On en déduit alors que

$$\forall x,\ H(x+1) - H(x) = \int_x^{x+1} h(t)\ dt = 0$$

ce qui montre que H est aussi 1-périodique. De plus, pour tout entier n, $\int_0^n h = 0$ et

$$\forall x,\ H(x) = \int_0^{[x]} h(t)\ dt + \int_{[x]}^x h(t)\ dt = \int_{[x]}^x h(t)\ dt$$

Le changement de variable $u = t - |x|$ donne (avec la périodicité de h)

$$\forall x,\ H(x) = \int_0^{x-[x]} h(u)\ du = \int_0^{x-[x]} (u - 1/2)\ du = \frac{(x-[x])(x-[x]-1)}{2}$$

H est, comme la fonction partie entière, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

IV.C. Soit $n \in \mathbb{N}$. h est continue sur $[n, n+1[$ et, d'après le théorème fondamental, l'application $x \mapsto \int_n^x h$ est une primitive de h sur $[n, n+1[$. En ajoutant une constante, on garde une primitive. On a donc aussi H qui est une primitive de h sur $[n, n+1[$. Une intégration par partie donne alors

$$(*)\ :\ \forall a \in [n, n+1[,\ \int_n^a \frac{h(u)}{x+u}\ du = \left[\frac{H(u)}{x+u}\right]_n^a + \int_n^a \frac{H(u)}{(x+u)^2}\ du$$

En faisant tendre a vers $n+1$ dans cette relation, on a alors (puisque $H(n) = H(n+1) = 0$)

$$(**)\ :\ \int_n^{n+1} \frac{h(u)}{x+u}\ du = \int_n^{n+1} \frac{H(u)}{(x+u)^2}\ du$$

La fonction $u \mapsto \frac{h(u)}{x+u}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$, elle présente un unique problème, pour l'existence d'intégrale, au voisinage de $+\infty$. Soit alors $b > 0$. On a

$$\int_0^b \frac{h(u)}{x+u}\ du = \sum_{k=0}^{[b]-1} \int_k^{k+1} \frac{h(u)}{x+u}\ du + \int_{[b]}^b \frac{h(u)}{x+u}\ du$$

Avec $(*)$ et $(**)$ on a donc (en tenant compte de $H([b]) = 0$)

$$\int_0^b \frac{h(u)}{x+u}\ du = \int_0^b \frac{H(u)}{(x+u)^2}\ du + \frac{H(b)}{(x+b)^2}$$

H étant continue et périodique est bornée sur $\mathbb{R}$. Le second terme du membre de droite est donc de limite nulle quand $b \to +\infty$. De plus, $u \mapsto \frac{H(u)}{x+u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dominée par $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On a ainsi l'existence d'une limite quand $b \to +\infty$ pour l'intégrale du membre de droite ci-dessus. Finalement, l'intégrale proposée existe et

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(x+u)^2}\, du$$

IV.D. Le changement de variable $t = u - n$ donne (avec la périodicité de h)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_{n+1/2}^{n+1} \frac{|h(u)|}{x+u}\, du = \int_{1/2}^{1} \frac{|h(t)|}{x+n+t}\, dt \geq \frac{1}{x+n+1} \int_{1/2}^{1} |h(t)|\, dt = \frac{1}{8(x+n+1)}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{n+1} \frac{|h(u)|}{x+u}\, du \geq \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k+1}$$

Le minorant est de limite infinie quand $n \to +\infty$ (somme partielle d'une série positive divergente). A fortiori, $b \mapsto \int_0^b \frac{|h(u)|}{x+u}\, du$ n'admet pas de limite finie quand $b \to +\infty$. Ainsi, $u \mapsto \frac{h(u)}{x+u}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

IV.E. On va utiliser la théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall u \geq 0,\ x \mapsto \frac{H(u)}{(x+u)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto -2\frac{H(u)}{(x+u)^3}$
- $\forall x > 0,\ u \mapsto x \mapsto \frac{H(u)}{(x+u)^2}$ et $u \mapsto x \mapsto -2\frac{H(u)}{(x+u)^3}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On a

$$\forall x \in [a,b],\ \forall u \geq 0,\ \left| x \mapsto \frac{H(u)}{(x+u)^2} \right| \leq x \mapsto \frac{\|H\|_\infty}{(a+u)^2}$$

$$\forall x \in [a,b],\ \forall u \geq 0,\ \left| x \mapsto -2\frac{H(u)}{(x+u)^3} \right| \leq x \mapsto \frac{2\|H\|_\infty}{(a+u)^3}$$

Les majorants sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ (continus et dominés par $1/u^2$ au voisinage de $+\infty$). Le théorème s'applique et le calcul de la question **IV.C** donne φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2H(u)}{(x+u)^3}\, du$$

Par ailleurs, le même calcul qu'en **IV.C** donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{2H(u)}{(x+u)^3}\, du$$

On a donc finalement

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2}\, du$$

5 Une autre identité due à Euler.

V.A. Une intégration par partie donne (on primitive 1 en $t - x - i - 1$)

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t)\, dt = [(t-x-i-1)\ln(t)]_{t=x+i}^{t=x+i+1} - \int_{x+i}^{x+i+1} \frac{t-x-i-1}{t}\, dt$$

Avec le changement de variable $u = t - x$ dans l'intégrale du membre de droite, on a alors

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t)\, dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\, du$$

V.B. On a tout d'abord

$$\forall i \in \mathbb{N}, \int_i^{i+1} \frac{h(u)}{x+u}\, du = \int_i^{i+1} \frac{u-i-1/2}{u+x}\, du = \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\, du + \frac{1}{2}\int_i^{i+1} \frac{du}{u+x}$$

En sommant ces relation de $i=0$ à $i=n$ et en utilisant la relation de Chasles et la question précédente, il vient

$$\int_0^{n+1} \frac{h(u)}{x+u}\, du = \ln(x(x+1)\dots(x+n)) - \int_x^{x+n+1} \ln(t)\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{n+1} \frac{du}{u+x}$$

Le calcul des intégrales est immédiat ($x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$) et on obtient la quantité

$$\ln((x+1)\dots(x+n)(x+n+1)) - (x+n+\frac{3}{2})\ln(x+n+1) + (x+n+1) + x\ln(x) - x + \frac{\ln(x)}{2}$$

On a alors

$$G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{x+u}\, du = \ln\left(\frac{n!n^{x+1}}{(x+1)\dots(x+n+1)}\right) = F_n(x)$$

V.C.1 On écrit que

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$$

$$\begin{aligned}
(x+n+\frac{3}{2})\ln(x+n+1) &= (n+x+\frac{3}{2})\left(\ln(n) + \ln(1+\frac{1+x}{n}\right) \\
&= (n+x+\frac{3}{2})\left(\ln(n) + \frac{1+x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= n\ln(n) + (x+\frac{3}{2})\ln(n) + (1+x) + o(1)
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$G_n(x) = 1 + (x+\frac{1}{2})\ln(x) - 1 - x + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$$

c'est à dire que

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi})$$

V.C.2 Avec l'identité d'Euler et la continuité de ln, on a $F_n(x) \to \ln(\Gamma(x+1))$ quand $n \to +\infty$. On a ainsi, en passant à la limite dans **V.B**,

$$\ln(\Gamma(x+1)) = (x+\frac{1}{2})\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi}) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}\, du$$

V.D. Si on dérive cette relation, on obtient alors

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln(x) + \frac{x+1/2}{x} - 1 + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\, du$$

ou encore

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln(x) + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2}\, du$$

6 Distribution de Bolzmann.

VI.A.1 Ω est une partie fermée comme image réciproque du fermé $\{(N,E)\}$ par l'application continue $(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto(\sum x_i,\sum \varepsilon_i x_i)$. C'est aussi une partie bornée (Ω est inclus dans la boule de centre 0 de rayon N pour la norme 1 sur $\mathbb{R}^4$, somme des modules des coordonnées). C'est donc un compact de $\mathbb{R}^4$. Une fonction continue sur Ω (à valeurs réelles) est donc bornée et atteint ses bornes. Elle présente donc un maximum sur Ω.

VI.A.2 Il s'agit de résoudre un système de Cramer d'inconnues x_3, x_4 (x_1 et x_2 sont des paramètres, le déterminant du système est $\varepsilon_4-\varepsilon_3\neq 0$). On obtient

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} N-x_1-x_2 & 1\\ E-\varepsilon_1x_1-\varepsilon_2x_2 & \varepsilon_4\end{vmatrix}}{\varepsilon_4-\varepsilon_3}=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_4}{\varepsilon_4-\varepsilon_3}x_1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_4}{\varepsilon_4-\varepsilon_3}x_2+\frac{N\varepsilon_4-E}{\varepsilon_4-\varepsilon_3}$$

$$x_4=\frac{\begin{vmatrix} 1 & N-x_1-x_2\\ \varepsilon_3 & E-\varepsilon_1x_1-\varepsilon_2x_2\end{vmatrix}}{\varepsilon_4-\varepsilon_3}=\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_1}{\varepsilon_4-\varepsilon_3}x_1+\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_2}{\varepsilon_4-\varepsilon_3}x_2+\frac{E-N\varepsilon_3}{\varepsilon_4-\varepsilon_3}$$

VI.A.3 Soit $h\ :\ (x_1,x_2)\mapsto(x_1,x_2,ux_1+vx_2+w,u'x_1+v'x_2+w')$. Sous réserve que ses coordonnées soient positives, l'image d'un élément de $(\mathbb{R}^+)^2$ par h est un élément de Ω (on peut passer des formules donnant x_3 et x_4 au système de deux équations définissant Ω).
Par ailleurs, h étant continue, si $h(x_1,x_2)$ a ses coordonnées >0, c'est aussi le cas pour touts les (y_1,y_2) dans une petite boule ouverte autour de (x_1,x_2).
Si on suppose les a_i strictement positifs, il existe donc une boule ouverte B centrée sur (a_1,a_2) telle que pour tout $(x,y)\in B$, $h(x,y)\in\Omega$. f présentant un maximum global sur Ω, il en est de même pour $f\circ h$ sur B et ce maximum est atteint en (a_1,a_2). Comme B est un ouvert, (a_1,a_2) est alors un point critique de $f\circ h$. Les formules de dérivation composées donnent ainsi

$$0=\frac{\partial f\circ h}{\partial x_1}(a_1,a_2)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+u\frac{\partial f}{\partial x_3}(a)+u'\frac{\partial f}{\partial x_4}(a)$$
$$0=\frac{\partial f\circ h}{\partial x_2}(a_1,a_2)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)+v\frac{\partial f}{\partial x_3}(a)+v'\frac{\partial f}{\partial x_4}(a)$$

VI.A.4 $F=\mathrm{Vect}((1,0,u,u'),(0,1,v,v'))$ est un espace vectoriel de dimension 2 (indépendance linéaire des vecteurs immédiate) qui admet donc un supplémentaire orthogonal $F^\perp$ de dimension $4-2=2$. Les formules obtenues plus haut donnent

$$1+u+u'=1+v+v'=\varepsilon_1+u\varepsilon_3+\varepsilon_4u'=\varepsilon_2+v\varepsilon_3+\varepsilon_4v'=0$$

et $(1,1,1,1)$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ sont des vecteurs orthogonaux à F(puisqu'ils sont orthogonaux aux éléments d'une base de F) et engendrent donc un sous-espace inclus dans $F^\perp$. Ils sont aussi indépendants (car les ε_i sont distincts, il suffit même que deux d'entre eux le soient). Par inclusion et dimension, on a donc

$$F^\perp=\mathrm{Vect}((1,1,1,1),(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4))$$

VI.A.5 D'après la question **A.3.**, le vecteur de coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est dans $F^\perp$. Il est donc combinaison linéaire des deux vecteurs trouvés ci-dessus. Il existe donc α et β tels que

$$\forall i\in\{1,\dots,4\},\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\alpha+\beta\varepsilon_i$$

VI.B. On a ici $\frac{\partial F}{\partial x_i}(N)=-\frac{\Gamma'(N_i+1)}{\Gamma(N_i+1)}$. En utilisant la seconde identité due à Euler et la question précédente, on dispose de α et β tels que pour tout i,

$$-\ln(N_i)-\frac{1}{2N_i}-\int_0^{+\infty}\frac{h(u)}{(N_i+u)^2}\,du=\alpha+\beta\varepsilon_i$$

Il suffit de poser $\lambda=-\alpha$ et $\mu=-\beta$ pour obtenir les relations de l'énoncé.

VI.C.1 Pour tout u, on a $-\frac{1}{2} \leq h(u) \leq \frac{1}{2}$. En multipliant par $\frac{1}{(u+N_i)^2}$ (ce qui ne change pas le sens de l'inégalité) et en intégrant entre 0 et $+\infty$ (positivité de l'intégrale et on prend soin de vérifier l'existence des intégrales) on obtient

$$-\frac{1}{2N_i} \leq \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+N_i)^2}\, du \leq \frac{1}{2N_i}$$

Si l'inégalité de droite (pr exemple) était stricte, on aurait $\int_0^{+\infty} \frac{1/2-h(u)}{(u+N_i)^2}\, du = 0$. La fonction intégrée étant positive, on aurait a fortiori $\int_0^{1/2} \frac{1/2-h(u)}{(u+N_i)^2}\, du = 0$ (on enlève un morceau positif et on a donc un résultat plus petit, qui est par ailleurs positif). Comme la fonction intégrée est psotive sur $[0, 1/2]$ et continue sur cet intervalle, elle devrait être nul, ce qui n'est pas le cas. Les inégalités sont donc strictes et alors

$$0 < \theta(N_i) < \frac{1}{N_i}$$

VI.C.2 On a $\ln(N_i) + \theta(N_i) = \lambda + \mu\varepsilon_i$ et donc (on compose par l'exponentielle)

$$N_i e^{\theta(N_i)} = e^{\lambda} e^{\mu\varepsilon_i}$$

C'est la formule voulue avec $K = e^{\lambda} > 0$.

Soit cette question est stupide, soit c'est moi qui oublie quelquechose. Je ne vois pas pourquoi on nous fait prouver l'encadrement pour $\theta(N_i)$.