Centrale PSI 1 - 2010
un corrigé.

1 Etude d'un "C" matriciel.

A. Les trois premières colonnes de C f_1, f_2, f_3 sont clairement indépendantes (si $a_1 f1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$, on a $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ en regardangt les trois premières coordonnées) et les suivantes en sont des combinaisons linéaires. On a donc

$$\text{rang}(c) = 3 \text{ et } \text{Im}(c) = \text{Vect}(e_3 + e_4 + e_5, e_2 + e_6, e_1 + e_7)$$

Par théorème du rang, le noyau de c est de dimension 4. Il suffit de trouver quatre vecteurs indépendants du noyau pour obtenir une base. On a

$$\ker(c) = \text{Vect}(e_5 - e_2, e_4 - e_3, e_6, e_7)$$

B.1. Comme il a été vu ci-dessus, on a

$$F = \text{Im}(c)$$

et F est donc stable par c ($\forall x \in F,\ u(x) \in F$).

B.2. On a aussi vu que (f_1, f_2, f_3) est une base de F. On remarque que

$$c(f_1) = 2f_3 + f_2,\ c(f_2) = f_2,\ c(f_3) = f_1$$

On en déduit que

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C.1. On a $\phi(f_2) = f_2$ et donc 1 est valeur propre de ϕ (f_2 est vecteur propre associé).

C.2. Comme matrice complexe, Φ admet trois valeurs propres $1, \lambda, \mu$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). Φ est semblable à une matrice complexe triangulaire et, la trace étant un invariant de similitude, on a

$$1 + \lambda + \mu = 1$$

et donc $\lambda = -\mu$. 0 n'est pas valeur propre de Φ car Φ est de rang 3 (colonne indépendantes de manière quasi immédiates) et ainsi λ et μ sont non nulles. On pourrait cependant avoir $\lambda = -\mu = 1$ et donc une valeur propre double qui nous impose de faire un calcul supplémentaire pour voir si Φ est diagonalisable.

C.3. Un calcul élémentaire donne

$$\Phi^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de Φ^2 sont $1, \lambda^2, \mu^2$ et on a donc $1 + \lambda^2 + \mu^2 = 5$. Comme $\lambda = -\mu$, on a $\lambda^2 = 2$ et de même $\mu^2 = \sqrt{2}$ puis $\{\lambda, \mu\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. On a donc

$$\text{Sp}(\Phi) = \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

On a trois valeurs propres réelles distinctes en dimension 3 et donc une matrice diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1 (dans $\mathbb{R}$ cette fois).

D.1. Toute valeur propre de ϕ est a fortiori valeur propre de c. On a donc trois valeurs propres non nulles de multiplicité au moins 1. On a aussi 0 qui est valeur propre de multiplicité au moins 4 (le noyau est de dimension 4). Par dimension, on a toutes les valeurs propres et leur ordre de multiplicité :

$$0 \text{ de multiplicité } 4\,;\ 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2} \text{ de multiplicités } 1$$

D.2. Les sous-espaces propres dont de dimension 4 (pour le noyau qu'on a calculé) et 1 (pour les trois autres car la multiplicité est égale à 1 et la dimension du sous-espace propres est plus petite que la multiplicité et toujours au moins égale à 1). La somme des dimension des sous-espaces propres vaut 7 et C est diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(0,0,0,0,1,\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Ceci est vrai dans $\mathbb{R}$ et donc a fortiori dans $\mathbb{C}$.

E.1. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(f_1 + \lambda f_2) \circ c = f_1 \circ c + \lambda f_2 \circ c = f_1 + \lambda f_2$$

et donc $f_1 + \lambda f_2 \in \mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est non vide (il contient l'application nulle),

$$\mathcal{S} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^7, \mathbb{R})$$

E.2. On peouve par récurrence que la proposition

$$\forall f \in \mathcal{S},\ f \circ c^n = f$$

est vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ car $c^0 = Id$ et pour $n = 1$ par définition de $\mathcal{S}$.
- Hérédité. : soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai au rang n. Soit $f \in \mathcal{S}$; on a

$$f \circ c^{n+1} = (f \circ c^n) \circ c = f \circ c = f$$

et le résultat est vrai au rang $n + 1$.

E.3. Le cours nous apprend (en notant $Jac(g)(y)$ la matrice jacobienne d'une fonction g en y) que

$$Jac(f \circ c)(X) = Jac(f)(c(X))Jac(c)(X)$$

Par ailleurs, comme c est linéaire on a

$$Jac(c)(X) = C$$

De $f \circ c = f$, on en déduit que

$$Jac(f)(X) = Jac(f)(c(X))C$$

En multipliant à droite par un élément du noyau de C, on obtiendra une relation ne faisant intervenir que les $\partial_i f(X)$. $\ker(C)$ étant de dimension 4, on obtient quatre relations qui sont

$$\partial_5(f)(X) - \partial_2(f)(X) = 0,\ \partial_4(f)(X) - \partial_3(f)(X) = 0,\ \partial_6(f)(X) = 0,\ \partial_7(f)(X)$$

On peut bien sûr obtenir d'autre réelations mais elles lient $\partial_i(f)(X)$ et $\partial_i(f)(c(X))$ ce qui ne semble par répondre à la question.

E.4. On obtient de même, c^2 étant linéaire,

$$Jac(f)(X) = Jac(f \circ c^2)(X) = Jac(f)(c^2(X))C^2$$

mais je ne vois pas ce que cela apporte de plus de manière simple.

E.5. Si f est linéaire alors $\forall X,\ Jac(f)(X) = f$ et on a donc $f = f \circ c$ ou encore $f \circ (Id - c) = 0$. f est repésentée par une matrice ligne L qui vérifie $L(I_n - C) = 0$. L est donc dans le noyau de ${}^t(I_n - c)$. On obtient (mais avec un calcul supplémentaire) qu'il existe α tel que $L = \alpha(1, -1, 1, 1, -1, 0, 0)$. Les formes linéaire solutions sont celles du type

$$X \mapsto \alpha(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5)$$

2 Equation différentielle pour la lettre “C”.

A. Soit f solution de (E) sur l'intervalle J et soit a un réel non nul. Posons $h(x) = af(x/a)$; par théorèmes généraux, h est (comme f) dérivable sur J. De plus, $f(x) = \frac{1}{a}h(ax)$ et donc

$$\forall x \in J,\ f'(x) = h'(ax)$$

En injectant dans E, on a donc

$$\forall x \in J,\ h(ax)h'(ax) = -4(ax)$$

et h est solution de (E) sur aJ (si $J = [u, v]$ alors $aJ = [au, av]$ par exemple).

B.1. γ est une partie d'ellipse d'équation cartésienne $4x^2 + y^2 = 4$. cos réalise une bijection de $[\pi/4, \pi]$ dans $[-1, \sqrt{2}/2]$ et il existe bien une fonction g (pour les paramètres considérés, on n'a pas deux points ayant même abscisse). De plus ($\sin(t) \geq 0$ et on a des ordonnées positives)

$$g\ :\ x \in [-1, \sqrt{2}/2] = \Delta \mapsto 2\sqrt{1-x^2}$$

B.2. On s'intéresse ici à g sur $I =]-1, \sqrt{2}/2[$. Sur I, g est dérivable (l'argument de la racine est > 0) et

$$\forall x \in I,\ g'(x)g(x) = \frac{-4x}{2\sqrt{1-x^2}}2\sqrt{1-x^2} = -4x$$

et

$$g \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I =]-1, \sqrt{2}/2[$$

B.3. Considérons la fonction

$$m\ :\ x \in]-1, 1[\mapsto 2\sqrt{1-x^2}$$

Le même calcul montre que m est encore solution de (E) mais cette fois sur $]-1, 1[$. Comme m prolonge la solution de la question précédente, cette dernière n'est pas maximale.
Pour montrer que m, il suffit de montrer que cette fonction ne peut se prolonger sur un intervalle plus grand en une fonction encore dérivable (et donc a fortiori en une fonction solution sur cet intervalle plus grand). Or, si un tel prolongement existe, c'est un prolongement par continuité et $m(1) = 0$ ou $m(-1) = 0$ et comme m' est de limite infinie en ± 1, un corollaire des accroissements finis montre que le prolongement n'est pas dérivable (la courbe représentative admet une demi tangente-verticale). Ainsi

$$m \text{ est solution maximale}$$

C.1. Soit F une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation

$$(E)\ :\ y' = F(x, y)$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et si $(x_0, y_0) \in U$ alors le problème de Cauchy associé à (x_0, y_0) admet une unique solution maximale. C'est à dire qu'il existe une unique fonction y définie sur un intervalle I contenant x_0 telle que $y(x_0) = y_0$, $\forall x \in I,\ (x, y(x)) \in U$ et $y'(x) = F(x, y(x))$ et y non prolongeable sur un intervalle strictement plus grand que I en une fonction qui possède les mêmes propriétés.

C.2. Ici, on considère

$$F\ :\ (x, y) \mapsto -\frac{4x}{y}$$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des ouverts $U_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ et $U_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{-*}$. On peut ainsi appliquer le théorème précédent avec $U = U_i$ quand $(x_0, y_0) \in U_i$.

C.3. Dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a maximalité (et unicité) d'une solution à qui on impose de rester dans l'ouvert U. Dans l'équation (E), on n'a pas a priori besoin d'imposer $y(x) \neq 0$ pour que l'expression ait un sens. Les solutions maximales **au sens de la question C.3** ne sont donc pas **a priori** maximale pour (E) telle qu'elle est écrite dans l'énoncé.
Supposons que y soit une solution maximale de (E) définie sur un intervalle I.

- Si y ne s'annule pas alors elle reste de signe constant (théorème des valeurs intermédiaires) et c'est une solution maximale au sens de la question 3.
- Sinon, y s'annule en au moins un point $x_0 \in I$ mais l'équation donne alors $x_0 = 0$. On a donc $0 \in I$ et y qui s'annule uniquement en 0. (E) donne $\forall x \in I,\ (y^2)'(x) = -2x$ et, en intégrant entre 0 et un élément $x \in I$, $y^2(x) = y^2(x) - y^2(0) = -4x^2$ ce qui ne peut avoir lieu qu'en 0. A moins de considérer que l'on puisse parler de solution sur un intervalle réduit à un point, on obtient une contradiction.

Finalement, les solutions maximales sont bien celles que l'on peut obtenir par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

C.4. Il s'agit donc de trouver les solutions maximales associées aux problèmes de Cauchy (x_0, y_0) avec $y_0 \neq 0$. Soit y une telle solution et I son intervalle de définition. Comme ci-dessus, on a

$$\forall x \in I,\ y^2(x) - y_0^2 = -4x^2 + 4x_0^2$$

et on en déduit que y est de la forme $x \mapsto 2\sqrt{c^2 - x^2}$ ou $x \mapsto -2\sqrt{c^2 - x^2}$ (la solution maximale ne s'annule pas) avec $c > 0$. Réciproquement, ces fonctions sont solutions et l'intervalle maximal de définition de la solution est $]-c, c[$.
Remarque : on pourrait aussi utiliser la question A pour se ramener exactement au problème de Cauchy correspondant à la fonction m.

D.1. Le cours nous indique que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat, par exemple, par méthode de l'équation différentielle.
On en déduit que (écrire la relation en $-x^2$ pour $\alpha = 1/2$ et multiplir par 2)

$$\forall x \in]-1, 1[,\ m(x) = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{4^{n-1} n!(n-1)!} x^{2n}$$

Toujours d'après le cours, le rayon de convergence vaut 1. Pour retrouver ce point, on peut se donne er $x > 0$ et poser $a_n = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1} n!(n-1)!} x^{2n}$. On a alors $\forall n \geq 1,\ a_n \neq 0$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n-1)2n}{4(n+1)n} x^2 \to 1$$

Par règle de D'alembert $\sum(a_n)$ converge absolument si $x \in]0, 1[$ et diverge grossièrement si $x > 1$ ce qui nous redonne le résultat dur le rayon de convergence.

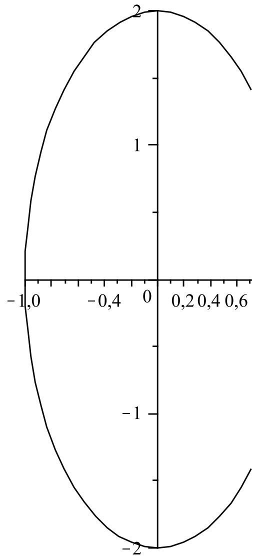
D.2. On a alors

$$\forall x \in]-c, c[,\ 2\sqrt{c^2 - x^2} = cm\left(\frac{x}{c}\right) = 2c + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{c^{2n-1} 4^{n-1} n!(n-1)!} x^{2n}$$

et comme ci-dessus on a une série entière de rayon de convergence égal à c.

3 Des courbes pour la lettre "C".

A.1. Comme dit plus haut, $\mathcal{C}$ est un morceaux d'ellipse.



A.2.

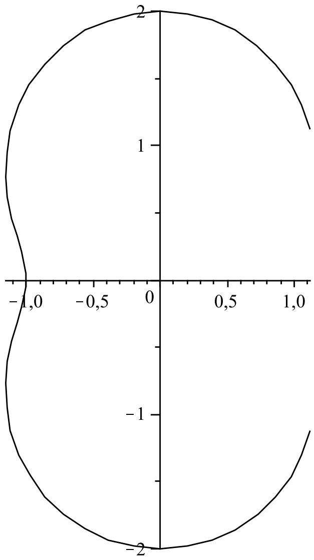
- $\mathcal{C}$ n'est pas un ouvert puisque $(-1, 0) \in \mathcal{C}$ n'est pas intérieur à $\mathcal{C}$ (toute boule centrée sur $(-1, 0)$ contient des points d'ordonnée < 0).
- $\mathcal{C}$ est l'image par γ de l'intervalle $[\pi/4, 7\pi/4]$. C'est donc l'image continue d'un compact et en tant que telle, c'est un compact. $\mathcal{C}$ est donc une partie fermée et bornée.
- $\mathcal{C}$ n'est pas convexe car le segment reliant $(-1, 0) \in \mathcal{C}$ et $(0, 2) \in \mathcal{C}$ n'est pas inclus dans $\mathcal{C}$.

B.1. On a

$$\forall t,\ \rho(t) = \sqrt{\cos(t)^2 + 4\sin(t)^2} = \sqrt{1 + 3\sin(t)^2}$$

B.2. Voici la commande et le tracé Maple

```
plot([sqrt(1+3*sin(t)^2),t,t=Pi/4..7*Pi/4],coords=polar,scaling=constrained);
```



Ceci m'évoque la lettre ω tournée de $-\pi/4$ mais aussi la lettre ε. On peut aussi, avec beaucoup d'imagination, voir une lettre "C" se serrant la ceinture.

B.3. On a bien sur

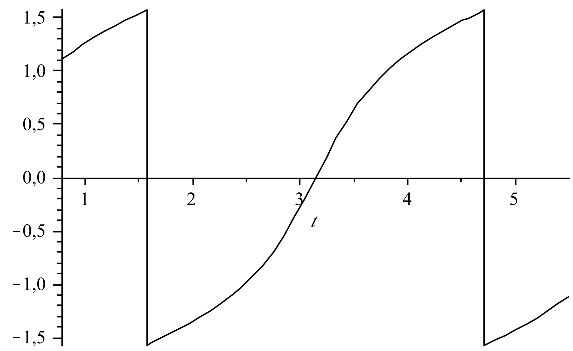
$$\forall t \in [\pi/4, 7\pi/4],\ t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2},\ \tan(\theta(t)) = \frac{2\sin(t)}{\cos(t)} = 2\tan(t)$$

Comme $\gamma(\pi/2) = (0, 2)$ et $\gamma(3\pi/2) = (0, -2)$, $\theta(\pi/2) = \pi/2$ et $\theta(3\pi/2) = 3\pi/2$ et la tangente n'est pas définie.

B.4. arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, il y a problème de définition pour $u(t) = \arctan(2\tan(t))$ quand il y a problème de définition pour $\tan(t)$. Ici, u est définie sur $D = [\pi/4, 7\pi/4] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$ et

$$\forall t \in D,\ u'(t) = 2\frac{1+\tan^2(t)}{1+4\tan^2(t)}$$

On obtient une fonction croissante sur chacun des intervalles constituant D. On a aussi existence d'une limite à droite et gauche pour u en $\pi/2$ et $3\pi/2$ (égale à $\pm\pi/2$) selon le point et le sens). Comme $u'(t)$ admet aussi une limite à droite et gauche en ces points (égale à 1), on a existence de demi-tangentes de pente 1 (corollaire des accroissements finis) et on obtient la courbe suivante.



Pour un raccord continu, il suffit de "translater des bouts de courbes". On s'arrange pour tomber entre $\pi/4$ et $7\pi/4$. et donc de poser

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \theta(t) = \arctan(2\tan(t))$$

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall t \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[,\ \theta(t) = \arctan(2\tan(t)) + \pi$$

$$\theta\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\forall t \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[,\ \theta(t) = \arctan(2\tan(t)) + 2\pi$$

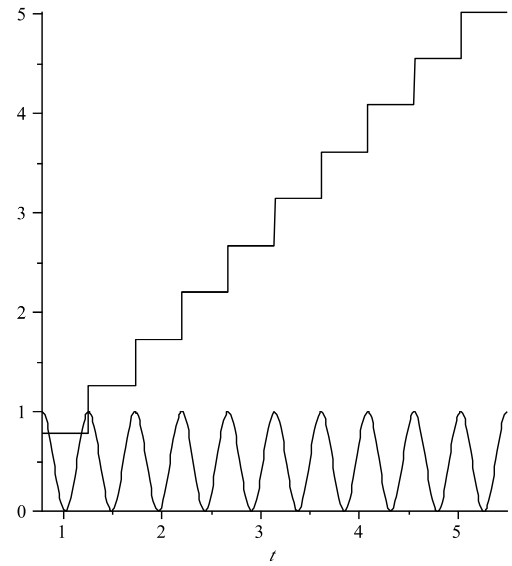
B.5. La suite de commandes

```
theta:=t->piecewise(t<Pi/2,arctan(2*tan(t)),t<3*Pi/2,arctan(2*tan(t))+Pi,
                                                      arctan(2*tan(t))+2*Pi);
plot([sqrt(1+3*sin(t)^2),theta(t),t=Pi/4..7*Pi/4],coords=polar,scaling=constrained);
```

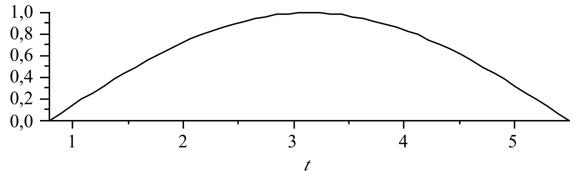
nous redonne la courbe $\mathcal{C}$.

C.1. ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\frac{3\pi}{n}$ périodique. A "contraction" et translation près, elle se comporte comme $\cos^2$.

De même, α se comporte presque comme la partie entuère et a un graphe "en escalier". On a discontinuité quand $t = \frac{\pi}{4}$ modulo $\frac{3\pi}{2n}$.



C.2.



C.3. Le caractère constant par morceaux de $t \mapsto \alpha(n,t)$ nous indique que la figure D est la bonne (le graphe présente des segment inclus dans des droites polaires $\theta = c^{te}$.

C.4. J'utilise `display` pour mettre les graphes sur le même schéma et l'option `insequence=true` pour créer l'animation.

```
with(plots);
display([seq(plot([w(n,t),theta(alpha(n,t)),t=Pi/4..7*Pi/4],coords=polar),n=1..100)],
                                                                     insequence=true);
```

D.1. Soit $\omega = P\ dx + Q\ dy$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ et Γ l'arc de $\mathbb{R}^2$ défini paramétriquement par $t \in [a,b] \mapsto M(t)$. On suppose l'arc Γ fermé et sans point multiples (hormis $\phi(a) = \phi(b)$). On a alors, K étant le compact délimité par Γ,

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right)\ dxdy = \int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(M(t))(M'(t))\ dt$$

et cette formule permet de calculer des surfaces :

$$\iint_K\ dxdy = \int_\Gamma x\ dy = -\int_\Gamma y\ dx = \frac{1}{2}\int_\Gamma (xdy - ydx)$$

D.2. Dans le cas d'un paramétrage en polaire $t \mapsto \sigma(t)e^{i\mu(t)}$ on a $x(t) = \sigma(t)\cos(\mu(t))$ et $y(t) = \sigma(t)\sin(\mu(t))$ et donc $x(t)d(y(t)) - y(t)d(x(t)) = \sigma(t)^2\mu'(t)$. Ainsi,

$$\iint_K dxdy = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(t)^2\mu'(t)\ dt$$

D.3. On pose $d(t) = \arctan(2\tan(t))$. On a alors $d'(t) = \frac{2+2\tan^2(t)}{1+4\tan^2(t)} = \frac{2}{1+3\sin^2(t)}$ et ainsi

$$\frac{1}{2}(1+3\sin^2(t))d'(t) = 1$$

D.4. On obtient $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires (puisque $\mathcal{H}$ est la différence de deux domaines) :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{7\pi/4} \rho(t)^2(1+\psi(t))^2\theta'(t)\ dt - \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{7\pi/4} \rho(t)^2\theta'(t)\ dt$$

Avec la question précédente (et $\theta'(t) = d'(t)$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ce qui ne change rien au calcul de l'intégrale) on a donc (calcul avec Maple)

$$\mathcal{A} = \int_{\pi/4}^{7\pi/4} (2\psi(t) + \psi(t)^2)\ dt = \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{64}$$