



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**CODE SUJET :**  
**298**  
**EDHECMATE**

## ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

### Concours d'admission sur classes préparatoires

## MATHÉMATIQUES

### Option économique

Lundi 7 mai 2007 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***

### Exercice 1

Pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on note  ${}^tM$  la matrice transposée de  $M$ , définie de la façon

suivante : si  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  alors  ${}^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

On pose  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On rappelle que  $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\varphi$  l'application qui à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  associe  $\varphi(M) = M + {}^tM$ .

- 1) a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
b) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
c) En déduire que  $\varphi$  est diagonalisable et non bijectif.
- 2) Calculer  $A^2$  et en déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $A^n = 2^{n-1}A$ .
- 3) a) Montrer que  $\text{Im } \varphi = \text{vect}(E_1, E_2 + E_3, E_4)$ , puis établir que  $\dim \text{Im } \varphi = 3$ .  
b) En déduire la dimension de  $\text{Ker } \varphi$  puis déterminer une base de  $\text{Ker } \varphi$ .  
c) Établir que  $\text{Im } \varphi$  est un sous-espace propre de  $\varphi$  et préciser la valeur propre associée.  
d) Donner, pour résumer, les deux valeurs propres de  $\varphi$  ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

## Exercice 2

On admet que, si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\text{cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2).$$

On admet également que si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles  $X$  et  $U$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes,  $X$  suivant la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $U$  suivant la loi discrète uniforme sur  $\{-1, 1\}$ .

On pose  $Y = UX$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

1) a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(Y \leq x) = P([U = 1] \cap [X \leq x]) + P([U = -1] \cap [X \geq -x]).$$

b) En déduire que  $Y$  suit la même loi que  $X$ .

2) a) Calculer l'espérance de  $U$  puis montrer que  $E(XY) = 0$ .

b) En déduire que  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

3) a) Rappeler la valeur de  $E(X^2)$  et en déduire que  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}$ .

b) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

c) En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  converge et vaut  $\frac{3}{2} \sqrt{2\pi}$ .

d) Établir finalement que  $X$  a un moment d'ordre 4 et que  $E(X^4) = 3$ .

4) a) Vérifier que  $E(X^2 Y^2) = 3$ .

b) Déterminer  $\text{cov}(X^2, Y^2)$ .

c) En déduire que  $X^2$  et  $Y^2$  ne sont pas indépendantes. Montrer alors que  $X$  et  $Y$  ne le sont pas non plus.

d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densité. Lequel ?

## Exercice 3

1) a) Montrer que :  $\forall x > 0, x - \ln x > 0$ .

b) On pose alors : 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de la fonction  $f$ .

2) a) Montrer que  $f$  est continue sur  $D$ .

b) Montrer que  $f$  est dérivable (à droite) en 0 et que  $f'_d(0) = 0$ .

3) a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $D \setminus \{0\}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $D \setminus \{0\}$ .

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) Étudier le signe de  $f(x)$ .

- 5) Pour tout réel  $x$  élément de  $D$ , on pose  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .
- Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $D$  puis étudier ses variations.
  - Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$ .
  - En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t} dt$ , puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

## Problème

### Partie 1

On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer les valeurs propres de  $M$ , que l'on notera  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  avec  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ .
  - En déduire que  $M$  est diagonalisable.

2) On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Calculer le produit  $MP$ .

Que peut-on en déduire en ce qui concerne les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  ?

- Justifier que la matrice  $P$  est inversible.

Montrer alors que :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P D^n P^{-1}$ , où  $D$  est la matrice  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer  $P^{-1}$  et en déduire explicitement  $M^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

### Partie 2

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On y effectue au hasard des tirages d'une boule selon la procédure suivante :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout  $i$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $B_i$  (respectivement  $R_i$ ) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) au  $i^{\text{ème}}$  tirage ».

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches qui restent dans l'urne après le  $n^{\text{ème}}$  tirage et l'on pose  $X_0 = 2$ .

On pose  $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$  et on a donc  $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Montrer, grâce à la formule des probabilités totales, que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = M U_n$ .
- En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = M^n U_0$ , puis déterminer la loi de  $X_n$ .

3) On note  $T_1$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on extrait la première boule blanche et  $T_2$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage où l'on extrait la deuxième boule blanche. On admet que  $T_1$  et  $T_2$  sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  que les variables aléatoires  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

a) Reconnaître la loi de  $T_1$ .

b) Écrire les événements  $(T_2 = 2)$  et  $(T_2 = 3)$  à l'aide de certains des événements  $B_i$  puis calculer les probabilités  $P(T_2 = 2)$  et  $P(T_2 = 3)$ .

c) Déterminer la loi du couple  $(T_1, T_2)$  et en déduire que la loi de  $T_2$  est donnée par :

$$\forall j \geq 2, P(T_2 = j) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}.$$

d) Montrer que  $T_2$  possède une espérance et calculer cette dernière.

4) a) Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, écrire l'événement  $(T_2 = n)$  en fonction des événements  $(X_{n-1} = 1)$  et  $(X_n = 0)$ .

b) Retrouver ainsi la loi de  $T_2$ .

5) a) On rappelle que la fonction  $random(n)$  renvoie aléatoirement un nombre entier élément de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $X_n = 0$ .

```

Program edhec2007 ;
Var X, n, hasard : integer ;
Begin
  Randomize ;
  X := 2 ; n := 0 ;
  Repeat
    n := n + 1 ;
    hasard := random(3) ;
    if (-----) then X := ----- ;
  until (X = 1) ;
  Repeat
    n := n + 1 ;
    hasard := ----- ;
    if (-----) then X := ----- ;
  until (X = 0) ;
  Writeln (n) ;
End.
```

b) Comment modifier ce programme pour qu'il calcule et affiche les valeurs prises par  $T_1$  et  $T_2$  lors de l'expérience aléatoire étudiée ?