La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Préambule

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$a(t)\,y'' + b(t)\,y'(t) + c(t)\,y(t) = h(t) \quad (\mathcal{E})$$

où a, b, c et h sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, et telles que a ne s'annule jamais.

1. Soit y une solution de $(\mathcal{E})$.
   Pour tout réel t, on pose :

   $$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

   Montrer que Y est solution du système différentiel $(\mathcal{S})$:

   $$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$

2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$?

3. Soit (u, v) une base de solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$.
   Pour tout réel t, on pose :

   $$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \quad , \quad V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$$

   On recherche une solution de $(\mathcal{S})$ sous la forme :

   $$W(t) = \lambda(t)\,U(t) + \mu(t)\,V(t)$$

   où λ et μ sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à déterminer.

   On pose :

   $$H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)} \end{pmatrix}$$

   Montrer que W est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, pour tout t de $\mathbb{R}$:

   $$\lambda'(t)\,U(t) + \mu'(t)\,V(t) = H(t)$$

4. En déduire que, pour tout réel t :

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda'(t)\,u(t) + \mu'(t)\,v(t) & = & 0 \\ \lambda'(t)\,u'(t) + \mu'(t)\,v'(t) & = & \frac{h(t)}{a(t)} \end{array} \right.$$

Partie I

1. *i.* On considère la série entière $\sum_{p\geq 0}(-1)^p\, t^{2p}$: donner son rayon de convergence et sa somme, lorsque celle-ci est définie.

   ii. On considère la série entière $\sum_{p\geq 0}(-1)^p\, t^{2p+1}$: donner son rayon de convergence et sa somme, lorsque celle-ci est définie.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_c)$: $y''=0$.

3. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}_h)$: $(1+t^2)\,y''(t)+4\,t\,y'(t)+2\,y(t)=0$.

   (a) Soit f une solution de $(\mathcal{E}_h)$, définie sur $\mathbb{R}$.

   i. Montrer que la fonction $t\mapsto (1+t^2)\,f(t)$ est une fonction affine de t (on pensera à calculer sa dérivée seconde).

   ii. Montrer que $\left(t\mapsto \frac{1}{1+t^2},\, t\mapsto \frac{t}{1+t^2}\right)$ est une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E}_h)$.

   (b) *Dans cette question, on propose une autre méthode pour déterminer les solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_h)$.*

   On recherche les solutions de $(\mathcal{E}_h)$ développables en série entière au voisinage de 0, sous la forme :

$$y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n$$

   où les a_n, $n\in\mathbb{N}$, sont des réels.

   i. Donner, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n.

   ii. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p, a_0 et a_1.

   iii. En déduire une expression simplifiée de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n$ sur un voisinage de 0.

4. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$:

$$(1+t^2)\,y''(t)+4\,t\,y'(t)+2\,y(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

   On cherche à résoudre $(\mathcal{E})$ en appliquant la méthode de variation des constantes du préambule, i.e. en recherchant la solution sous la forme :

$$t\mapsto y(t)=\frac{\lambda(t)}{1+t^2}+\frac{t\,\mu(t)}{1+t^2}$$

   où λ et μ sont deux fonctions inconnues, à déterminer.

(a) Donner la condition vérifiée pour tout réel t par $\lambda'(t)$ et $\mu'(t)$.

(b) Montrer que, pour tout réel t :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda'(t) & = & -\frac{t}{1+t^2} \\ \mu'(t) & = & \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right.$$

(c) Exprimer, pour tout réel t, $\lambda(t)$ et $\mu(t)$.

(d) En déduire l'expression de la solution générale de $(\mathcal{E})$.

Partie II

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $\varphi(n) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1-2\,t}{1+t^2}\,dt,\ \psi(n) = \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Donner, pour tout entier naturel non nul n, l'expression de $\varphi(n)$ en fonction de n.

2. Rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre p en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ pour une fonction g de classe C^p sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant x_0.

3. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre $2p$ en 0, et en déduire celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ à l'ordre $2p+1$ en 0.

4. Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, et préciser la valeur de cette constante.

5. Déterminer un réel α tel que, pour n assez grand :

$$\left| \cos\left(\varphi(n) + \psi(n) + 2\,\ln n\right) - \frac{\alpha}{n^2} \right| \leq \frac{\beta}{n^4}$$

   où β est un réel positif que l'on ne cherchera pas à déterminer.

6. Quelle est la nature de la série $\left(\displaystyle\sum_{n>0} \cos\left(\varphi(n) + \psi(n) + 2\,\ln n\right)\right)$?

7. Quelle est la nature de la série $\left(\displaystyle\sum_{n>0} \cos\left(\varphi(n)\right)\right)$?

Partie III

Pour tout réel x, on pose : $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Montrer que Φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Déterminer : $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x)$.

   (b) Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x)$.

3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que :
$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_X^Y \{\Phi(t+a) - \Phi(t+b)\}\, dt = \int_X^{X+b-a} \Phi(t+a)\, dt - \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a)\, dt$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists\, Y_0 \in \mathbb{R} : t \geq Y_0 \Rightarrow |\Phi(t+a) - \ell| \leq \varepsilon$.

5. En déduire que, pour tout $Y \geq Y_0$: $\left| \int_Y^{Y+b-a} \Phi(t+a)\, dt - (b-a)\,\ell \right| \leq (b-a)\,\varepsilon$.

6. Montrer que : $\exists\, X_0 \in \mathbb{R} : t \leq X_0 \Rightarrow |\Phi(t+a) + \ell| \leq \varepsilon$.

7. Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} \{\Phi(t+a) - \Phi(t+b)\}\, dt$?

8. (a) Montrer que :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^+ : \int_0^X \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt = \int_X^{X+1} \Phi(t)\, dt - \int_0^1 \Phi(t)\, dt$$

   (b) Montrer que :

$$\int_0^1 \Phi(t)\, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

   (c) Montrer que :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, X_1 \in \mathbb{R}^+ : t \geq X_1 \Rightarrow |\Phi(t) - \ell| \leq \varepsilon$$

   (d) Que vaut $\int_0^{+\infty} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt$?

9. Montrer que, pour tout entier naturel k :

$$\frac{1}{(k+2)^2 + 1} \leq \int_k^{k+1} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt \leq \frac{1}{k^2 + 1}$$

10. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\}\, dt$$

11. En déduire un encadrement de $\int_0^{+\infty} \{\Phi(t+1) - \Phi(t)\} \, dt$ entre deux sommes de séries.

Ce problème propose, tout d'abord, la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre par différentes méthodes : méthode de variation des constantes, intégration directe, recherche de solutions développables en série entière. La solution fait intervenir la fonction Arctangente, qui est étudiée dans les parties suivantes.