page 146 1/4 1992

CONCOURS MINES. PONTS M Math 2

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1992

MATHEMATIQUES

DEUXIEME EPREUVE
OPTION M

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHEMATIQUES II - M .

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option M, comporte 4 pages.

NOTATIONS ET OBJECTIFS

n désigne un entier supérieur strictement à 1 et E l'ensemble des matrices carrées (n, n) à termes réels ; ${}^tA$ est la matrice transposée de A .

Les vecteurs x, y, ... de $\mathbb{R}^n$ seront désignés aussi par des matrices colonnes X, Y, ... ; $\mathbb{R}^n$ sera muni du produit scalaire $(\ |\ )$ défini par : $(x|y) = (X|Y) = {}^tXY$.

La norme d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ sera notée $|X|$. L'espace vectoriel E sera muni du produit scalaire $((\ |\ ))$ défini par : $((A|B)) = \mathrm{tr}\,({}^tA.B)$. Le couple $(E\ ,\ ((|)))$ est un espace euclidien. La norme d'une matrice A sera notée $\|A\|$.
(Rappel : la trace du produit AB est égale à la trace de BA lorsque les produits AB et BA sont des matrices carrées.)

Le but du problème est de montrer que pour une matrice M donnée, il est possible de trouver une matrice P de rang inférieur à celui de M, telle que la distance de M à P soit la plus petite possible.

PREMIERE PARTIE

Etude des matrices de rang 1

I.1 Factorisation des matrices de rang 1 :

a. Soit m un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que m est de rang 1 si et seulement s'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et une forme linéaire u définie sur $\mathbb{R}^n$, non nuls, tels que, pour tout vecteur t de $\mathbb{R}^n$: $m(t) = u(t).x$.

Déterminer la matrice M associée à cet endomorphisme m dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple : Expliciter M lorsque : $x = e_i$, $u = e_j^*$; (e_i) , $1 \leqslant i \leqslant n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$; $\left(e_j^*\right)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ la base duale associée.

b. En déduire l'expression générale d'une matrice M de rang 1 à l'aide du produit d'une matrice colonne X et d'une matrice ligne ${}^tY$.

c. Etablir les relations qui lient les matrices colonnes X,X' et Y,Y' lorsqu'une même matrice M de rang 1 est égale aux produits $X.{}^tY$ et $X'.{}^tY'$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

I.2 Rang d'une famille de matrices de rang 1 :

a. Démontrer que toute matrice M de E est égale à une somme de matrices de rang 1 .

b. Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$; démontrer que la suite des matrices $(X_i.{}^tY_j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ est une base de E .

c. Soient deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $(U_1, U_2, \ldots, U_p)$ et $(V_1, V_2, \ldots, V_q)$ de rangs r et s .
Déterminer le rang de la famille des matrices $(U_i.{}^tV_j)$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, considérées comme vecteurs de E .

I.3 Orthogonalité des matrices de rang 1 dans E , ((|)) :

a. A quelle condition sur les vecteurs X,X' , Y,Y' de $\mathbb{R}^n$, les matrices $X.{}^tY$ et $X'.{}^tY'$ sont-elles orthogonales dans E , ((|)) ?

b. En déduire comment choisir deux suites (X_i) , $1 \leq i \leq n$ et (Y_j) , $1 \leq j \leq n$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, pour que la suite des matrices $(X_i.{}^tY_j)$ soit orthonormée dans E , ((|)) .

I.4 Matrices diagonalisables de rang 1 :

Soit A une matrice de rang 1 définie par $A = X.{}^tY$; soit a le réel ${}^tXY$.

a. Démontrer que la matrice A annule un polynôme de degré 2 . En déduire les valeurs propres possibles de A .

b. Pour quelles valeurs du réel a la matrice A est-elle diagonalisable ?

c. Exemple : Considérer le cas suivant : n = 3 ,

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} , \quad \alpha \text{ est un réel .}$$

Discuter la diagonalisation de $A = X.{}^tY$ suivant les valeurs de α .

d. Démontrer que les matrices diagonalisables de rang 1 engendrent E .

DEUXIEME PARTIE

Soient A, B deux matrices de E , soit $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de E défini par la relation :

$$\Phi_{A,B}(M) = A.M.{}^tB .$$

Cette partie a pour but d'établir des propriétés de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$.

II.1 Rang de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$:

Déterminer, en fonction des rangs r et s des matrices A et B, le rang de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$.

II.2 Vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$:

a. Démontrer que si V et W sont des vecteurs propres des matrices A et B, la matrice $V.{}^tW$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$.

b. Caractériser les matrices de rang 1 qui appartiennent au noyau de $\Phi_{A,B}$.

c. Soit $X.{}^tY$ une matrice de rang 1 vecteur propre associé à la valeur propre μ , différente de zéro, de $\Phi_{A,B}$. Est-ce que X et Y sont des vecteurs propres de A et B ?

d. Démontrer que si A et B sont des matrices diagonalisables, l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est aussi diagonalisable. Calculer alors la trace de $\Phi_{A,B}$.

e. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$, dans le cas suivant:

$$n = 2 \quad ; \quad A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

II.3 Propriétés d'orthogonalité de $\Phi_{A,B}$:

a. L'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est supposé orthogonal dans E , ((|)) ; c'est-à-dire : pour toutes matrices M et N de E , $((\Phi_{A,B}(M) \mid \Phi_{A,B}(N))) = ((M \mid N))$.

En choisissant pour M et N deux matrices égales de rang 1 , établir qu'il y a une relation simple, pour tout couple de vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$, entre $|AX|^2.|BY|^2$ et $|X|^2.|Y|^2$.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ soit orthogonal dans E , ((|)) .

TROISIEME PARTIE

Expression d'une matrice M de rang r à l'aide de matrices de rang 1 .

Désignons par m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé dans la base canonique à une matrice M de rang r , et par m^* l'endomorphisme adjoint de m : pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$

$$(m^*(x) \mid y) = (x \mid m(y)) .$$

III.1 Valeurs propres de l'endomorphisme $m^* \circ m$:

Démontrer que le rang de l'endomorphisme composé $m^* \circ m$ est égal à r . Etablir l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres (v_i) , $1 \leqslant i \leqslant n$ de $m^* \circ m$ telle que les valeurs propres α_i associées vérifient les relations :

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_r > 0 \quad \text{et si } r < n \quad , \quad \alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = \alpha_n = 0 .$$

III.2 a. Démontrer que les vecteurs $m(v_i)$ sont orthogonaux deux à deux. Calculer leurs normes.

b. En déduire qu'il existe deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, (Y_i) , $1 \leqslant i \leqslant n$ et (Z_i) , $1 \leqslant i \leqslant n$ telles que :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i}\, Y_i\, {}^tZ_i .$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

QUATRIEME PARTIE

Approximation d'une matrice de rang r par une matrice de rang inférieur s dans E , ((|))

La matrice M de rang r est donnée ainsi qu'un entier s vérifiant $s < r$; le but de cette partie est de déterminer une matrice P qui rende minimum la distance de M à l'ensemble $\mathfrak{R}_s$ des matrices de rang inférieur ou égal à s . La distance de la matrice M à $\mathfrak{R}_s$ est définie par la relation :

$$d(M, \mathfrak{R}_s) = \inf\{\|M - N\| \mid N \in \mathfrak{R}_s\} .$$

Il sera admis dans la suite que si N est une matrice de rang q , et M une matrice de rang r , la suite décroissante (γ_i) des valeurs propres de la matrice ${}^t(M - N)(M - N)$ vérifie pour i , $1 \leqslant i \leqslant n-q$, l'inégalité :

$\gamma_i \geqslant \alpha_{i+q}$ où α_i est la suite décroissante des valeurs propres de ${}^tM.M$.

IV.1 Résolution du problème d'approximation :

Le rang r de la matrice M est supposé supérieur strictement à 1 .
Soit s un entier tel que $0 < s < r$.

a. Démontrer l'inégalité : $d(M, \mathfrak{R}_s) \leqslant \sqrt{\alpha_{s+1} + \ldots + \alpha_r}$, les α_i sont les valeurs propres de la matrice ${}^tM.M$.

b. Soit N une matrice de $\mathfrak{R}_s$; comparer $\|M - N\|^2$ et $\alpha_{s+1} + \ldots + \alpha_r$.

c. En déduire la valeur de $d(M, \mathfrak{R}_s)$.
Existe-t-il une matrice P de $\mathfrak{R}_s$ telle que $\|M - P\| = d(M, \mathfrak{R}_s)$?

d. Est-ce que $\mathfrak{R}_s$ est un sous-ensemble fermé de E ?

IV.2 Approximation par une matrice symétrique :

Soit s un entier, $1 \leqslant s \leqslant n$; soit S_s l'ensemble des matrices symétriques de rang inférieur ou égal à s . Soient A et B deux matrices respectivement symétrique et antisymétrique.

a. Que vaut ((A|B)) ?

b. Démontrer qu'il existe une matrice symétrique U appartenant à S_s approchant A au plus près.
Evaluer $\|A - U\|$ à l'aide des valeurs propres λ_i de A ($|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$) . A quelle condition y-a-t-il unicité de la matrice U ?

c. Soit M une matrice de E ; $M = A + B$ avec $A = {}^tA$, $B = -{}^tB$.
Démontrer qu'il existe une unique matrice symétrique V appartenant à S_s approchant M au plus près. La caractériser et donner la valeur de $d(M, S_s)$.

FIN DU PROBLEME