

Dans ce problème, les figures ou les commentaires, même non demandés, qui éclaireraient les situations ou les hypothèses rencontrées seront les bienvenus.

Dans tout le problème, on désigne par  $\mathcal{P}$  un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , par  $(C)$  le cercle centré en  $O$  et de rayon donné  $R$ ,  $R > 0$ , et par  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  les points de coordonnées respectives  $(R, 0)$ ,  $(0, R)$  et  $(-R, 0)$ .

**Partie I - Un exemple pratique**

Dans cette partie, on désigne par  $(E)$  la courbe d'équation  $4x^2 + 5y^2 - 4Ry = 0$ .

- I.A - Montrer que  $(E)$  est une ellipse. En déterminer deux axes de symétrie et un centre de symétrie.
- I.B - Étudier le signe de l'expression  $(4x^2 + 5y^2 - 4Ry) - 4(x^2 + y^2 - R^2)$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . En déduire les positions relatives de  $(E)$  et  $(C)$ .
- I.C -

I.C.1) Soit  $(\mathcal{E})$  l'ellipse de représentation paramétrique  $(x = a \cos \theta, y = b \sin \theta)$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels non nuls et où le paramètre  $\theta$  décrit  $\mathbb{R}$ . Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = mx + m'$  rencontre  $(\mathcal{E})$  en un point unique si et seulement si il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + m')^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x}{a^2} + m \frac{mx + m'}{b^2} = 0 \end{cases}$$

En déduire que, dans ce cas,  $(D)$  est tangente à  $(\mathcal{E})$ .

I.C.2) En se ramenant à la question précédente, montrer que, si dans  $\mathcal{P}$  une droite coupe une ellipse en un seul point, elle lui est tangente. Est-ce encore le cas pour une parabole ? Pour une hyperbole ?

I.C.3) Montrer que les droites d'équation  $x + y = R$  et  $-x + y = R$  sont tangentes à  $(E)$  en des points que l'on précisera. Tracer soigneusement  $(C)$  et  $(E)$ , ainsi que ces deux droites.

I.D - On considère l'arc paramétré défini par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = R \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \vec{i} + \frac{2t}{1+t^2} \vec{j} \right), \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que l'on définit ainsi une bijection de  $\mathbb{R}$  sur une partie  $(\gamma)$  de  $(C)$  que l'on précisera. Si  $t$  est réel, on dira que  $t$  est le paramètre du point  $M(t)$ .

I.E - Soit  $t$  et  $u$  deux réels. Montrer que  $(1-p)x + sy - R(1+p) = 0$  est une équation de la droite  $(M(t)M(u))$ , si l'on a posé  $s = t + u$  et  $p = tu$ .

Si  $t = u$ , la notation  $(M(t)M(u))$  désignera cette fois la tangente en  $M(t)$  à  $(\gamma)$ .

On admettra sans le vérifier que l'équation trouvée convient encore dans ce cas.

I.F -

I.F.1) Soit  $M$  un point de  $(\gamma)$ , de paramètre  $t$ . Montrer que, sauf dans un cas particulier à préciser, son symétrique orthogonal  $\hat{M}$  par rapport à  $(O; \vec{j})$  est un point de  $(\gamma)$ ; en exprimer le paramètre, noté  $\hat{t}$ .

Si  $A_0$  désigne le point de coordonnées  $(R, 2R)$ , montrer que, lorsque  $t \neq 1$ , la droite  $(A_0\hat{M})$  recoupe  $(\gamma)$  au point de paramètre  $\frac{1}{1-t}$  (on pourra utiliser les résultats de I.E.).

I.F.2) Dans le cas particulier où  $t \neq 1$  et  $u = \frac{1}{1-t}$ , on pose toujours  $s = t + u$  et  $p = tu$ .

Montrer que la droite  $(M(t)M(u))$  est tangente à  $(E)$  (on pourra exprimer  $(p+1)s$  en fonction de  $p$  seulement et utiliser les résultats de I.C.2.).

I.F.3) En utilisant les questions qui précèdent, montrer que, si un point  $A$  de  $(C)$  est distinct des points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  définis dans le préambule, alors une construction géométrique simple, que l'on détaillera, permet de construire deux autres points  $A'$  et  $A''$  de  $(C)$  tels que les côtés du triangle  $AA'A''$  soient tangents à  $(E)$ . Étudier le cas des points  $A_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

I.G - Récapituler les résultats de cette partie à l'aide d'une figure.

### Partie II - Correspondances algébriques

Soit  $P$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  de la forme

$$(x, y) \mapsto P(x, y) = u_{1,1}x^2 + 2u_{1,2}xy + u_{2,2}y^2 + v_1x + v_2y + w$$

où les coefficients  $u_{i,j}$ ,  $v_i$  et  $w$  sont des réels.

On lui associe la relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $(\gamma) \times (\gamma)$  par

$$M(t) \mathcal{R} M(u) \Leftrightarrow P(s, p) = 0$$

où l'on a posé  $s = t + u$  et  $p = tu$ . On dira que  $\mathcal{R}$  est une 2-correspondance si  $u_{1,1}$ ,  $u_{1,2}$  et  $u_{2,2}$  ne sont pas tous les trois nuls, et une 1-correspondance si  $u_{1,1} = u_{1,2} = u_{2,2} = 0$ , mais  $v_1$  et  $v_2$  non tous nuls.

#### II.A - Exemple de 1-correspondance

Soit  $A$  un point donné de  $\mathcal{P}$ , différent de  $A_3$ . Montrer que la relation sur  $(\gamma) \times (\gamma)$  définie par  $M(t) \mathcal{R} M(u) \Leftrightarrow A \in (M(t)M(u))$  est une 1-correspondance.

Donner un exemple simple de 1-correspondance qui ne soit pas de cette forme.

#### II.B - Exemple de 2-correspondance

Soit  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $\Omega$  de coordonnées  $(\alpha, 0)$  et de rayon  $r$ ,  $r > 0$  donnés.

II.B.1) Si  $(D)$  est la droite d'équation  $ax + by = c$ , avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , donner une expression du carré de la distance de  $\Omega$  à  $(D)$ , noté  $d^2(\Omega, D)$ .

II.B.2) En déduire que, si  $t$  et  $u$  sont des réels, la droite  $(M(t)M(u))$  est tangente à  $(\Gamma)$  si et seulement si

$$((R + \alpha)^2 - r^2)p^2 - r^2s^2 + 2(R^2 + r^2 - \alpha^2)p + (R - \alpha)^2 - r^2 = 0$$

puis que cela définit ici une 2-correspondance.

II.C - Si  $\mathcal{R}$  est une 1-correspondance, montrer que l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $M(t) \mathcal{R} M(t)$  est fini (ou vide). Montrer que cette propriété tombe en défaut pour une 2-correspondance et une seule.

**Pour fournir certains des exemples demandés dans la partie qui suit, les candidats pourront mettre à profit l'exemple II.B en choisissant de façon adéquate le cercle  $(\Gamma)$ .**

### Partie III - L'alternative de Poncelet

Le but de cette partie est l'étude de l'existence, étant donné une 2-correspondance  $\mathcal{R}$  vérifiant quelques propriétés supplémentaires, de paramètres réels (distincts ou non)  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $t_4$  formant un 4-cycle pour  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire tels que  $M(t_i) \mathcal{R} M(t_{i+1})$  pour  $1 \leq i \leq 3$  et  $M(t_4) \mathcal{R} M(t_1)$ .

III.A - Comment interpréter géométriquement un 4-cycle dans le cas où  $\mathcal{R}$  est la 2-correspondance définie à la question II.B.2? Montrer par un choix de  $(\Gamma)$  qu'il peut y avoir une infinité de solutions, et qu'il peut n'y avoir aucune solution.

III.B - Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $V(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

III.B.1)  $t$  et  $u$  étant réels, à quelle condition la famille  $\{V(t), V(u)\}$  est-elle liée dans  $\mathbb{R}^3$ ?

III.B.2) Soit  $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$ ; on pose :

$$W(t) = \begin{pmatrix} P(t) \\ Q(t) \\ R(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Montrer qu'il existe  $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  unique telle que  $W(t) = \mathcal{A}V(t)$  pour tout réel  $t$ .

III.B.3) Caractériser à l'aide de  $\mathcal{A}$  la liberté de la famille  $\{P, Q, R\}$  dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$ .  
En déduire que si  $\{P, Q, R\}$  est libre, alors la famille  $\{W(t), W(u)\}$  est libre si et seulement si  $t \neq u$ .

III.B.4) a) On suppose, jusqu'à la fin de ce III.B, que  $\{P, Q, R\}$  est de rang 2.  
Montrer que  $\mathcal{A}$  admet 0 comme valeur propre et en déduire qu'il existe trois réels  $a, b, c$  tels que

$$\{W(t), W(u)\} \text{ liée} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & t^2 & u^2 \\ b & t & u \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Montrer que ce déterminant est égal à  $(t - u)(a - bs + cp)$ , avec  $s = t + u$  et  $p = tu$ .  
Établir alors le résultat suivant, vrai sauf pour des valeurs particulières de  $(a, b, c)$  que l'on mettra en évidence :

Il existe une 1-correspondance  $\mathcal{R}_0$  telle que, chaque fois que les réels  $t$  et  $u$  vérifient  $M(t) \mathcal{R}_0 M(u)$ , la famille  $\{W(t), W(u)\}$  est liée.

III.C - On considère une 2-correspondance de la forme

$$M(t)\mathcal{R}M(u) \Leftrightarrow P(s, p) = Ap^2 + 2Bps + Cs^2 + 2Dp + 2Es + F = 0$$

où  $A, B$  et  $C$  sont des réels non tous nuls,  $D, E$  et  $F$  des réels, et où  $p$  et  $s$  désignent encore  $tu$  et  $t + u$ .

III.C.1) Écrire  $P(s, p)$  sous la forme  $P_1(t)u^2 + 2P_2(t)u + P_3(t)$ , où  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**Exemple 1.** Lorsque  $P(s, p) = s^2 - 4p$ , déterminer  $P_1, P_2$  et  $P_3$  ainsi que le rang de la famille  $\{P_1, P_2, P_3\}$ .

**Exemple 2.** On considère, pour ce seul exemple, deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  strictement positifs tels que  $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$  et on pose  $P(s, p) = \alpha^2(1 - p)^2 + \beta^2s^2 - R^2(1 + p)^2 = 0$ .

Montrer que  $\{P_1, P_2, P_3\}$  vérifie les hypothèses du III.B.4-a) puis déterminer la 1-correspondance définie comme dans le III.B.4-b).

III.C.2) Montrer que si, pour  $u_2 \in \mathbb{R}$ , l'équation en  $u : P_1(u_2)u^2 + 2P_2(u_2)u + P_3(u_2) = 0$  possède deux solutions réelles (distinctes ou non)  $u_1$  et  $u_3$ , alors on a  $M(u_1) \mathcal{R} M(u_2)$  et  $M(u_2) \mathcal{R} M(u_3)$ .

III.C.3) a) On pose  $\Delta(t) = P_2^2(t) - P_1(t)P_3(t)$ .

Montrer, par un exemple, qu'il est possible que  $\forall t \in \mathbb{R}, \Delta(t) < 0$ , ou que  $\Delta(t) < 0$  sauf en un point. Que penser dans chacun de ces cas de l'existence de 4-cycles ?

**On suppose maintenant qu'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$ , supposé choisi, tel que  $\Delta(t_0) > 0$ .  
On suppose en outre que  $P_1(t_0) \neq 0$  (ce qui, en fait, ne restreint nullement la généralité recherchée).**

b) Montrer qu'il existe alors un intervalle ouvert non vide  $\mathcal{I}_0$  en tout point duquel  $\Delta(t) > 0$  et  $P_1(t) \neq 0$ .

c) En conclure que si la famille  $\{P_1, P_2, P_3\}$  est libre, il n'existe aucun 4-cycle formé de paramètres distincts.

d) Si la famille  $\{P_1, P_2, P_3\}$  est de rang 2, montrer qu'il existe une 1-correspondance  $\mathcal{R}_0$  telle que, chaque fois que l'on a  $t_1 \in \mathcal{I}_0$  et  $M(t_1) \mathcal{R}_0 M(t_2)$ , il existe  $u_1$  et  $u_2$  tels que  $t_1, u_1, t_2, u_2$  soit un 4-cycle. Peut-on alors faire en sorte que ces quatre paramètres soient distincts ?

III.C.4) a) Dans le cas de l'exemple de II.B, montrer que l'hypothèse du III.B.4-a) quant au rang de  $\{P, Q, R\}$  équivaut à

$$(R^2 - \alpha^2) ((R^2 - \alpha^2) - 2r^2(R^2 + \alpha^2)) = 0.$$

b) Que signifie la condition  $R^2 - \alpha^2 = 0$  ? Indiquer une construction géométrique de 4-cycles dans le cas où elle est vérifiée. Prouver géométriquement que cette construction convient.

---

FIN

---