

Dans tout le problème,  $P$  désigne le plan affine euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire canonique, de son repère orthonormé canonique  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  de son orientation canonique et de son repère polaire canonique.

On appellera **conique** toute partie  $\mathcal{C}$  (vide ou non) de  $P$  ayant une équation de la forme

$$\{M_{(X,Y)} \in \mathcal{C}\} \Leftrightarrow \{AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0\}$$

où  $A, B, C, D, E, F$  sont six réels, avec en outre  $A, B, C$  non tous nuls.

À tout  $(A, B, C, D, E, F)$ , élément de  $\mathbb{R}^6$  tel que  $A, B, C$  non tous nuls correspond ainsi une conique  $\mathcal{C}$ , que l'on pourra noter  $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$ .

Le but du problème est notamment l'étude de l'ensemble des points communs à certains ensembles de coniques.

### Partie I - Préliminaires

**I.A** - Montrer que les fonctions  $\theta \mapsto \cos 2\theta$ ;  $\theta \mapsto \sin 2\theta$ ;  $\theta \mapsto \cos \theta$ ;  $\theta \mapsto \sin \theta$ ;  $\theta \mapsto 1$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  forment une famille libre dans l'espace des fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$ .

**I.B** - Soit un cercle quelconque du plan  $P$ , que l'on supposera de rayon  $\rho > 0$ .

Montrer que si le cercle est inclus dans la conique  $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$ , alors  $A = C$  et  $B = 0$ .

Réciproquement, que peut-on dire d'une conique  $\mathcal{C}_{(A,0,A,D,E,F)}$  ?

### Partie II -

On note  $P' = P \setminus \{Oy\}$  le plan  $P$  privé de l'axe des ordonnées. On note  $M_0$  un point de coordonnées  $(X_0, Y_0)$  appartenant à  $P'$ .

Soit  $\mathcal{E}_1$  l'ensemble des coniques  $\mathcal{C}_{(A,B,C,D,E,F)}$  satisfaisant aux quatre conditions :

$$\begin{cases} M_0 \in \mathcal{C} \\ A = C \end{cases} \quad \begin{cases} E = 0 \\ F = 0 \end{cases}$$

#### II.A -

II.A.1) Montrer que le seul élément, noté  $(\mathcal{C}_1)$ , de  $\mathcal{E}_1$  qui soit un cercle a pour équation

$$x_0(X^2 + Y^2) - (x_0^2 + y_0^2)X = 0.$$

Montrer que  $(\mathcal{C}_1)$  est tangent à l'axe  $Oy$  et indiquer une construction géométrique de son centre.

II.A.2) Montrer qu'il existe un seul élément, noté  $(\mathcal{C}_2)$ , de  $\mathcal{E}_1$  qui ait une équation de la forme  $BXY + CX = 0$ . En indiquer une caractérisation géométrique.

II.A.3) Déterminer  $(\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C}_2)$ . En discuter le nombre d'éléments. En déduire l'ensemble des points communs à tous les éléments de  $\mathcal{E}_1$ .

**II.B** - On appelle  $\varphi$  l'application de  $P'$  dans  $P$  qui, au point  $M$  de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ , tel que  $\rho \neq 0$  et que pour tout entier relatif  $k$ ,  $\theta \neq (2k + 1)\pi/2$ , associe  $M'$  de coordonnées polaires  $(\rho \tan \theta, \frac{\pi}{2} - \theta)$ .

II.B.1) Montrer que cette définition de  $\varphi(M)$  est *cohérente*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de  $(\rho, \theta)$  parmi les coordonnées polaires possibles du point  $M$ . Montrer que  $\varphi(M_0)$  appartient à toutes les coniques de  $\mathcal{E}_1$ . En déduire une construction géométrique de  $\varphi(M_0)$  à l'aide d'un cercle et d'une droite.

II.B.2) Pour  $M \in P'$ , quand a-t-on  $\varphi(M) \in P'$  ? Que dire alors de  $\varphi \circ \varphi(M)$  ?

II.B.3) On appelle  $\gamma$  la courbe d'équation polaire

$$\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \mapsto \rho = 2a \sin \theta, \text{ où } a > 0 \text{ est donné.}$$

Reconnaître  $\gamma$ ; déterminer une représentation polaire de la courbe  $\gamma' = \varphi(\gamma)$ ; étudier et tracer cette courbe, avec justifications.

**II.C** - Dans cette question,  $M_0(x_0, y_0)$  est un point de  $P'$  tel que  $|x_0| \neq |y_0|$  et on lui associe  $M'_0 = \varphi(M_0)$  comme ci-dessus.

II.C.1) a) Montrer que, quel que soit le couple  $\lambda, \mu$  de réels non tous nuls, il existe un unique réel  $\nu$ , que l'on calculera, tel que la conique  $(\mathcal{C}_{\lambda, \mu})$  d'équation  $\lambda(X^2 + Y^2) + 2\mu XY + \nu X = 0$  appartienne à  $\mathcal{E}_1$ .

b) Lorsque  $|\lambda| \neq |\mu|$ , montrer que  $(\mathcal{C}_{\lambda, \mu})$  a un centre  $\Omega_{\lambda, \mu}$  dont on déterminera les coordonnées. [Pour ce faire, il est possible d'effectuer une translation arbitraire de l'origine du repère puis de faire en sorte que la nouvelle origine devienne centre de symétrie de la conique  $(\mathcal{C}_{\lambda, \mu})$ .]

II.C.2) Le point  $M_0$  restant fixé, montrer que tous les points  $\Omega_{\lambda, \mu}$  (où  $|\lambda| \neq |\mu|$ ) appartiennent à la conique  $\Gamma$  d'équation

$$X^2 - Y^2 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{2x_0} X + y_0 Y = 0.$$

En déterminer le genre, le centre, les sommets et les axes.

II.C.3) Déterminer les intersections de  $\Gamma$  avec les droites  $Ox, Oy, OM_0, OM'_0$  et  $M_0M'_0$ . On trouvera en général six points en tout, pour lesquels le centre de  $\Gamma$  joue un rôle particulier que l'on mettra en évidence.

II.C.4) Faire une figure d'ensemble.

II.C.5) Étudier et représenter  $(\mathcal{C}_{1,1})$  et  $(\mathcal{C}_{1,-1})$ . On réalisera la figure en prenant  $x_0 = 2, y_0 = 1$ . Que remarque-t-on quant à leurs axes ?

**On identifiera pour la suite du problème les espaces vectoriels euclidiens canoniques  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ . On désignera par  $i$  le complexe de module 1 et d'argument  $\pi/2$ .**

### Partie III -

On admet que le déterminant de Vandermonde

$$V(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^2 & z_3^3 \\ 1 & z_4 & z_4^2 & z_4^3 \end{vmatrix}$$

en les complexes  $z_1, z_2, z_3, z_4$  est nul si, et seulement si, deux au moins des  $z_i$  sont égaux.

Dans cette partie et la suivante, on étudie un problème analogue à celui de la première, mais par une méthode sensiblement différente.

**III.A** - On s'intéresse à l'ensemble  $\mathcal{E}_2$  des parties de  $\mathbb{R}^2$  ayant une équation de la forme  $A\bar{z}z + B(z^2 + \bar{z}^2) + \bar{C}z + Cz + D = 0$  où les réels  $A, B, D$  et le complexe  $C$  ne sont pas tous les quatre nuls, et qui contiennent trois points  $M_1, M_2, M_3$  non alignés donnés, d'affixes respectifs  $z_1, z_2, z_3$ .

III.A.1) Vérifier que les éléments de  $\mathcal{E}_2$  sont bien des coniques et donner une propriété commune de leurs axes.

III.A.2) Pour  $z_4$  donné dans  $\mathbb{C}$ , on définit les matrices

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 z_1 & z_1^2 + \bar{z}_1^2 & z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ \bar{z}_2 z_2 & z_2^2 + \bar{z}_2^2 & z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ \bar{z}_3 z_3 & z_3^2 + \bar{z}_3^2 & z_3 & \bar{z}_3 & 1 \\ \bar{z}_4 z_4 & z_4^2 + \bar{z}_4^2 & z_4 & \bar{z}_4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Établir que la matrice  $\tilde{\mathcal{M}}$  est inversible. Quelle conclusion peut-on en tirer quant au rang de  $\mathcal{M}$  ?

b) On définit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ . En donner la dimension. Montrer que

$S = \{(A, B, C, D), \forall i \in \{1, 2, 3\}, A\bar{z}_i z_i + B(z_i^2 + \bar{z}_i^2) + C\bar{z}_i + \bar{C}z_i + D = 0\}$

est un sous-espace vectoriel de  $E$  et en donner la dimension.

- c) Montrer que le point  $M_4$  d'affixe  $z_4$  appartient à toutes les coniques éléments de  $\mathcal{E}_2$  si, et seulement si, le rang de  $\mathcal{M}$  est égal à 3. [Pour la condition nécessaire, on pourra faire intervenir un système linéaire bien choisi.]

**III.B -** On suppose dans cette question que les complexes  $z_1, z_2, z_3$  sont égaux respectivement à  $a \exp(i\theta_1), a \exp(i\theta_2)$  et  $a \exp(i\theta_3)$ , où  $a > 0$  et  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  sont des réels.

III.B.1) Montrer qu'il existe un unique cercle dans  $\mathcal{E}_2$  et que si le point  $M_4$  d'affixe  $z_4$  appartient à toutes les coniques éléments de  $\mathcal{E}_2$ , alors  $z_4$  est de la forme  $a \exp(i\theta_4)$ .

III.B.2) Soit le déterminant

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} z_1^2 & z_1^4 + a^4 & z_1^3 & z_1 \\ z_2^2 & z_2^4 + a^4 & z_2^3 & z_2 \\ z_3^2 & z_3^4 + a^4 & z_3^3 & z_3 \\ z_4^2 & z_4^4 + a^4 & z_4^3 & z_4 \end{vmatrix}$$

Montrer que  $\mathcal{D}$  est de la forme  $(z_1 z_2 z_3 z_4 - a^4) \mathcal{V}$ , où  $\mathcal{V}$  s'exprime très simplement à l'aide de  $V(z_1, z_2, z_3, z_4)$ .

III.B.3) Montrer que la condition énoncée en III.A.2-c) est équivalente à la nullité de  $\mathcal{D}$ .

III.B.4) a) En déduire l'ensemble des points communs aux coniques de  $\mathcal{E}_2$ . Discuter soigneusement le nombre d'éléments de cet ensemble.

b) Lorsque ce nombre est égal à 4, que peut-on dire des directions des bissectrices du couple de droites  $(M_1 M_2, M_3 M_4)$  ?

**III.C -**

III.C.1) Généraliser les résultats de III.B.4 au cas où l'on ne fait plus l'hypothèse III.B. [On montrera comment on peut se ramener à ce cas.]

III.C.2) Soit trois points  $A, B, C$  non alignés dans  $P$  et  $(\Delta)$  une droite. Par  $A$ , resp.  $B$ , resp.  $C$ , on mène la parallèle à la symétrique de la droite  $BC$ , resp.  $CA$ , resp.  $AB$ , par rapport à  $(\Delta)$ . Montrer que ces trois droites concourent. [On pourra commencer par le cas où  $(\Delta)$  est l'axe  $Ox$ ; dans ce cas, il suffit d'utiliser les résultats de la partie III.]

### **Partie IV -**

On considère dans cette partie des équations de la forme

$$\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0 \tag{1}$$

où  $A \neq 0$  et  $B$  sont deux complexes et  $C$  un réel.

**IV.A -**

IV.A.1) Soit  $\theta$  un réel et  $\Phi$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui à  $z$  associe  $z \exp i\theta$ .

Montrer que, si  $(\Gamma) \subset P$  a une équation de la forme (1), alors on peut choisir  $\theta$  pour que  $\Phi(\Gamma)$  ait une équation de la forme

$$\frac{A'}{2} (z^2 + \overline{z}^2) + \overline{B}'z + B'\overline{z} + C' = 0$$

où l'on ait de plus  $A' \in \mathbb{R}^{+*}$ .

IV.A.2) En déduire la nature d'une telle partie  $(\Gamma)$  de  $P$ . [On pourra revenir en coordonnées cartésiennes.]

**IV.B -** Soit trois points  $M_1, M_2, M_3$  non alignés donnés, d'affixes respectifs  $z_1, z_2, z_3$ . On appelle  $\mathcal{E}_3$  l'ensemble des coniques de  $P$  contenant ces trois points et ayant une équation de la forme (1). Soit  $M_4$  un point de  $P$ , d'affixe  $z_4$ . Montrer que toutes les coniques de  $\mathcal{E}_3$  passent par  $M_4$  si, et seulement si, le rang de la matrice

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} z_1^2 & \overline{z_1^2} & z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2^2 & \overline{z_2^2} & z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3^2 & \overline{z_3^2} & z_3 & \overline{z_3} & 1 \\ z_4^2 & \overline{z_4^2} & z_4 & \overline{z_4} & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à une valeur que l'on précisera.

**IV.C** - Dans cette question, on suppose que de plus  $z_1, z_2$  et  $z_3$  sont de même module  $a > 0$  et ont  $a^3$  pour produit.

IV.C.1) Déterminer deux complexes  $u$  et  $v$  tels que  $z_1, z_2$  et  $z_3$  soient solutions de  $Z^3 - uZ^2 + vZ - a^3 = 0$ .

IV.C.2) En déduire des complexes  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  tels que  $z_1, z_2$  et  $z_3$  soient solutions de

$$\begin{cases} H_1(Z) = Z^2 + \alpha Z + \beta - a\bar{Z} = 0 \\ H_2(Z) = Z + \alpha' + \beta'\bar{Z} - \frac{1}{a}\bar{Z}^2 = 0 \end{cases}$$

IV.C.3) Grâce à des combinaisons linéaires bien choisies sur les rangées de  $\mathcal{M}'$ , montrer que toutes les coniques de  $\mathcal{E}_3$  passent par  $M_4$  si, et seulement si,

$$H_1(z_4) = H_2(z_4) = 0 \tag{2}$$

IV.C.4) a) Montrer qu'il existe un polynôme  $\varpi(Z)$  à coefficients complexes, de degré 4, tel que (2) implique  $\varpi(z_4) = 0$ ; on donnera d'un tel polynôme les coefficients en  $Z^4$  et en  $Z^3$ , en fonction de  $a, u$  et  $v$ .

b) Déterminer les zéros de  $\varpi$  en discutant la multiplicité. [*On remarquera que trois zéros de  $\varpi$  sont déjà connus.*] On ne demande pas de vérifier qu'inversement tous les complexes obtenus vérifient (2).

IV.C.5) On choisit  $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$ .

a) Déterminer la valeur du produit scalaire  $\langle \overrightarrow{M_1M_4}, \overrightarrow{M_2M_3} \rangle$ . [On pourra introduire le produit  $(\overline{z_4 - z_1})(z_3 - z_2)$ .]

b) Que représente  $M_4$  pour le triangle  $M_1M_2M_3$  ?

**IV.D** - Généraliser les résultats de IV.C.5-b) au cas où l'on ne fait plus l'hypothèse du IV.C.

---

••• FIN •••

---