

Notations

On désigne par $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note tA la matrice transposée de A , $\overline{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice A et $\text{rg}(A)$ le rang de A .

On fixe un entier $n \geq 2$ et on considère $V = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $E = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement 0_V et 0_E . L'espace vectoriel V admet pour base canonique :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $(k, m) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ on pose $E_{k,m} = {}^t e_k e_m$ ce qui donne une matrice à n lignes et n colonnes dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 si $(i, j) = (k, m)$ et 0 sinon. La base canonique de E est constituée des n^2 matrices $E_{m,k}$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq m \leq n$. On note I la matrice identité, $I = \sum_{1 \leq k \leq n} E_{k,k}$.

Si A est une matrice élément de E et W un sous-espace vectoriel de V , $A(W)$ désigne l'ensemble $\{Aw, w \in W\}$. Si F est un sous-ensemble de E , on dit que W est stable par F si $\forall A \in F, A(W) \subset W$. Pour tout sous-ensemble $\mathcal{L}$ de E on s'intéresse aux propriétés suivantes :

P_1 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang 1,

P_2 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang n ,

P_3 : $\mathcal{L}$ contient I ,

P_4 : $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E ,

P_5 : $\mathcal{L}$ est stable par produit de matrices ($A, B \in \mathcal{L} \implies AB \in \mathcal{L}$),

P_6 : si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$, alors soit $W = 0_V$ soit $W = V$.

Partie I - Étude de quelques exemples

I.A Dans cette section I.A, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des $A \in E$ qui sont inversibles, soit $\mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C})$.

1. Soit x un vecteur non nul de V . Montrer que pour tout vecteur y non nul de V il existe une matrice inversible A telle que $Ax = y$.

Indication : on peut considérer deux cas :

(a) la famille (x, y) est liée,

(b) la famille (x, y) est libre.

En déduire que la propriété P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

2. Indiquer celles des propriétés $P_1, \dots, P_5$ qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.

I.B Dans cette section I.B, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices $T = (t_{k,m}) \in E$ qui sont triangulaires inférieures, c'est-à-dire telles que $m > k \implies t_{k,m} = 0$.

1. Montrer que e_n est vecteur propre de tout $T \in \mathcal{L}$ (c'est à dire Te_n est colinéaire à e_n). Que peut-on dire de la propriété P_6 pour $\mathcal{L}$?
2. Indiquer celles des propriétés $P_1, \dots, P_5$ qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.

I.C Dans cette section I.C , $n = 2$ et $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble de E pour lequel P_3 et P_4 sont vérifiées.

1. On suppose que P_1 n'est pas vérifiée par $\mathcal{L}$ (les matrices 2×2 de rang 1 appartiennent donc toutes à $E \setminus \mathcal{L}$ le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans E). Soit $A \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Quelles sont les valeurs possibles du rang de $A - \lambda I$? Montrer que $\mathcal{L}$ est l'ensemble des homothéties vectorielles.
2. On suppose que P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$. Montrer qu'alors la propriété P_1 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

Dans toute la suite du problème, P_4 et P_5 sont supposées vérifiées : $\mathcal{L}$ est donc un sous-espace vectoriel de E stable par produit matriciel.

Partie II.

Dans cette partie, les propriétés P_3 et P_6 sont supposées vérifiées par $\mathcal{L}$ (en plus de P_4 et P_5). On veut montrer qu'alors P_1 aussi est vérifiée. On note :

$$m = \min\{\text{rg}(M) \mid M \in \mathcal{L} \setminus \{0_E\}\}$$

et on se propose de montrer que $m = 1$ ce qui établira P_1 .

On suppose dans un premier temps que $m \geq 2$. On note alors M_0 un élément de $\mathcal{L}$ qui vérifie $\text{rg}(M_0) = m$ et on considère une base $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$ de $M_0(V)$. On note $x_1, \dots, x_n$ des éléments de V tels que $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, M_0 x_i = z_i$.

II.A Montrer que $\{N z_1 \mid N \in \mathcal{L}\} = V$. On note alors N_0 un élément de $\mathcal{L}$ qui vérifie $N_0 z_1 = x_2$ et on pose $M_1 = M_0 N_0 M_0$. Montrer que (M_0, M_1) est une famille libre.

II.B Montrer que $M_0(V)$ est stable par $M_0 N_0$, puis que :

$$\exists(\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V) \text{ tel que } z \neq 0_E \text{ et } M_0 N_0 z = \alpha z$$

En déduire que $0 < \text{rg}(M_1 - \alpha M_0) < \text{rg}(M_0)$. Conclure que $m = 1$.

Partie III.

Dans cette partie on suppose que $n > 2$ et que la dimension de $\mathcal{L}$ est supérieure ou égale à $n^2 - 1$. On veut montrer que P_3 et P_6 sont vérifiées, puis que $\mathcal{L} = E$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de E stable par produit matriciel.

III.A Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$; on note k la dimension de W . Montrer que $\{M \in E \mid M(W) \subset W\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{L}$ et dont la dimension vaut $n^2 - k(n - k)$. En déduire que $W = 0_V$ ou $W = V$. On a donc démontré P_6 .

III.B

1. On suppose ici : $(*) \exists(k, m) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2, k \neq m$ et $E_{k,m} \in E \setminus \mathcal{L}$.
On note alors $\mathcal{H} = \text{Vect}(E_{k,m}, I)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $E_{k,m}$ et I . Montrer que $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geq 1$ puis que $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible.
2. On suppose ici que c'est le contraire de $(*)$ qui est vrai, donc $k \neq m \Rightarrow E_{k,m} \in \mathcal{L}$. Trouver une combinaison linéaire de ces $E_{k,m}$ qui donne une matrice inversible.
En déduire que dans tous les cas $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible A .

III.C Montrer que pour la matrice A définie ci-dessus, la famille $(A, A^2, \dots, A^{n^2+1})$ est une famille liée. En déduire qu'il existe un entier $p > 0$ et des nombres complexes $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$ tels que $\lambda_0 \lambda_p \neq 0$ et

$$\sum_{j=0}^p \lambda_j A^j = \lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_p A^p = 0.$$

Montrer alors que $I \in \mathcal{L}$. On a donc démontré P3.

Compte tenu de la partie II, la propriété P_1 est donc satisfaite. On note alors M_0 une matrice de rang 1 qui appartient à $\mathcal{L}$, matrice que l'on peut écrire $M_0 = v_0 {}^t \overline{w_0}$, où v_0 et w_0 sont des éléments non nuls de V . On introduit le produit scalaire canonique sur V , $(v, w) \rightarrow {}^t \overline{v} w$ et pour $v \in V$ on pose :

$$A_v = \{Lv, L \in \mathcal{L}\},$$

$$B_v = \{{}^t \overline{L} v, L \in \mathcal{L}\},$$

$$C_v = (B_v)^\perp.$$

III.D Soit $u \in V, u \neq 0_V$. Montrer que C_u est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$ et que B_u n'est pas réduit à $\{0_V\}$.

Montrer alors que $C_u = \{0_V\}$ et $B_u = V$.

Montrer que $A_u = V$. En déduire que pour tout $(x, y) \in V^2$ il existe $L, M \in \mathcal{L}$ tels que $Lv_0 = x$ et ${}^t \overline{M} w_0 = y$, puis que toute matrice $A \in E$ de rang 1 appartient à $\mathcal{L}$. Montrer que $\mathcal{L} = E$.