Concours Centrale - Supélec 1994

# Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Option M, P'



## Notations

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal direct $R = (O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Si $M$ est un point quelconque de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x,y,z)$ dans $R$, on écrit $M = (x,y,z)$. Le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ est noté plus simplement $xOy$. Un plan (resp. une droite) parallèle au plan $xOy$ est dit(e) horizontal(e). Un plan (resp. une droite) perpendiculaire au plan $xOy$ est dit(e) vertical(e).

**Les cinq parties sont largement indépendantes les unes des autres.**

## Partie I - Étude d'une forme différentielle

Soit $\omega$ la forme différentielle définie en tout point $M = (x,y,z)$ de $\mathcal{E}$ par :

$$\omega(M) = -4xy^2zdx + 4x^2yzdy + (x^4 - y^4)dz \qquad (1)$$

et soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M = (x,y,z)$ tels que $x^2 - y^2 \neq 0$.

I.A - Dessiner l'ensemble des points $M = (x,y,z)$ tels que $x^2 - y^2 = 0$.

I.B - Soit $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

I.B.1) Écrire une équation différentielle linéaire du premier ordre à laquelle doit satisfaire $\varphi$ pour que la forme différentielle $\Omega$ définie en tout point $M = (x,y,z)$ de $\mathcal{D}$ par $\Omega(M) = \varphi(x^2 - y^2)\omega(M)$ soit exacte.

I.B.2) Déterminer alors $\varphi$ telle que : $\varphi(1) = 1$, $\varphi(-1) = 1$.

I.C - En déduire une fonction $U : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$dU = \Omega \qquad (2)$$

Pour tout $M = (x,y,z)$ de $\mathcal{D}$ tel que $z = 0$, $U(M) = 0$ (3)

## Partie II - Étude des surfaces de niveau de $U$

On appelle **surface de niveau** de $U$ toute partie $\Sigma_\lambda$ de $\mathcal{D}$ définie par $U(M) = \lambda$ où $\lambda$ est un réel donné.

II.A - Montrer que, pour tout réel $\lambda$, l'étude de $\Sigma_\lambda$ se ramène à celle de l'ensemble $S_\lambda$ de $\mathcal{E}$ défini par l'équation

$$z(x^2 + y^2) - \lambda(x^2 - y^2) = 0. \qquad (4)$$

II.B - Donner des éléments de symétrie de $S_\lambda$ ?

II.C -

II.C.1) Quel est l'ensemble $S_0$ ?

II.C.2) Pour $\lambda \neq 0$, comment l'ensemble $S_{-\lambda}$ se déduit-il de l'ensemble $S_\lambda$ ?

**Dans toute la suite du problème, on suppose** $\lambda > 0$.

II.D - Étude de l'intersection $C_{\lambda,1}$ de $S_\lambda$ avec le plan $P_1$ d'équation $z = x\sqrt{3} - y$.

II.D.1) Écrire une équation polaire de la projection orthogonale $C'_{\lambda,1}$ de $C_{\lambda,1}$ sur le plan $xOy$.

II.D.2) Construire $C'_{\lambda,1}$. On précisera notamment les tangentes à l'origine, l'asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote. La recherche systématique des points multiples et des points d'inflexion n'est par contre pas demandée.

II.E - Étude de l'intersection $C_{\lambda,2}$ de $S_\lambda$ avec le plan $P_2$ d'équation $z = x$

II.E.1) Montrer que la projection orthogonale $C'_{\lambda,2}$ de $C_{\lambda,2}$ sur le plan $xOy$ peut être représentée paramétriquement par

$$\begin{cases} x = \lambda \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\[2mm] y = \lambda \dfrac{t-t^3}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad (5)$$

II.E.2) Construire $C'_{\lambda,2}$. On précisera notamment les tangentes à l'origine, l'asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote. La recherche systématique des points multiples et des points d'inflexion n'est par contre pas demandée.

II.E.3) $C'_{\lambda,2}$ présente une boucle. Montrer que la longueur $L$ de cette boucle est donnée par :

$$L = 2\lambda \int_0^1 \frac{\sqrt{t^4 + rt^2 + s}}{t^2 + 1} dt$$

où $r$ et $s$ sont deux réels que l'on explicitera. Donner, sans chercher à calculer exactement l'intégrale, une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $L/(2\lambda)$.

II.E.4) Calculer l'aire $A$ intérieure à la boucle précédente. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à $10^{-3}$ près de $A/\lambda^2$.

## Partie III - Étude des droites tracées sur $S_\lambda$

III.A -

III.A.1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intersection de $S_\lambda$ avec le plan $\Pi_t$ d'équation $y = tx$ est la réunion d'une droite verticale, que l'on précisera, et d'une droite horizontale $\Delta_{\lambda,t}$ dont on explicitera un système d'équations.

III.A.2) En déduire l'ensemble des droites horizontales incluses dans $S_\lambda$.

III.B -

III.B.1) Établir que toute droite non horizontale de $\mathscr{E}$ peut être définie de façon unique par un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \quad a, b, p, q \text{ réels} \qquad (6)$$

III.B.2) Déterminer les droites non horizontales tracées sur $S_\lambda$.

## Partie IV - Définition géométrique de $S_\lambda$

IV.A - Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $S_\lambda$ et soit $t \in \mathbb{R}$. Écrire les coordonnées de la projection orthogonale $H_{0,t}$ de $M_0$ sur la droite définie par le système d'équations :

$$\begin{cases} y = tx \\ z = \lambda \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{cases} \qquad (7)$$

IV.B - Montrer que, quand $t$ varie dans $\mathbb{R}$, $H_{0,t}$ appartient à un plan fixe $Q_0$ dont on donnera une équation. Vérifier que $M_0 \in Q_0$.

IV.C - Donner une équation de la projection orthogonale $\Gamma'_0$ sur le plan $xOy$ de la courbe $\Gamma_0$ décrite par $H_{0,t}$ quand $t$ varie dans $\mathbb{R}$ et en déduire la nature géométique de $\Gamma_0$.

IV.D - À partir des trois questions précédentes, donner une définition géométrique de la surface $S_\lambda$.

## Partie V - Étude de certaines courbes tracées sur $S_\lambda$

Dans toute cette dernière partie, on note $(\rho, \theta, z)$ un système de coordonnées semi-polaires (ou cylindriques) de $M = (x, y, z)$ et on ne considère que ceux des points $M$ pour lesquels $\rho \neq 0$. On rappelle que, si $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et si $\vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{u}$, on a : $\vec{OM} = \rho\vec{u} + z\vec{k}$

V.A - Écrire une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier $(\rho, \theta, z)$ pour que $M$ appartienne à $S_\lambda$.

V.B - Soit $M$ un point de $S_\lambda$ de coordonnées semi-polaires $(\rho, \theta, z)$ avec $\rho \neq 0$. Trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(\alpha, \beta, \rho)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ soit normal en $M$ à $S_\lambda$.

V.C - Soit $\psi : ]0, \pi/2[ \to \mathbb{R}^*$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. La relation $\rho = \psi(\theta)$ définit une courbe $L_{\lambda,\psi}$ tracée sur $S_\lambda$.

Donner les coordonnées dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ d'un vecteur $\vec{N}$ orthogonal au plan osculateur à $L_{\lambda,\psi}$ au point $M$ de $S_\lambda$ de coordonnées semi-polaires $(\psi(\theta), \theta, z)$.

V.D -

V.D.1) À quelle condition le plan osculateur en $M$ à $L_{\lambda,\psi}$ et le plan tangent en $M$ à $S_\lambda$ coïncident-ils constamment lorsque $M$ parcourt $L_{\lambda,\psi}$ ?

V.D.2) Expliciter alors $\psi$.

V.D.3) Construire la projection orthogonale sur le plan $xOy$ de la courbe $L_{\lambda,\psi}$ qui passe par le point $A$ de coordonnées $(1, 1, 0)$ dans $R$.

••• FIN •••