

Polytechnique MP 2007 M2 (4h)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Relations de commutation

Dans ce problème, on se propose de décrire les triplets (K, E, F) où K, E, F sont trois endomorphismes d'un espace vectoriel satisfaisant certaines relations de commutation. On désignera toujours par q un nombre complexe non nul et tel que pour tout entier $n > 0$, $q^n \neq 1$.

Première partie

Dans cette partie, on désigne par X un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geq 2$, et par $(x_1, \dots, x_n)$ une base de X .

1. Soit A un endomorphisme de X représenté dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ par une matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts. Montrer que tout endomorphisme B de X , commutant à A , est aussi représenté par une matrice diagonale.
2. Soit $A_1, \dots, A_p$ des endomorphismes de X .
 - (a) Montrer que, si les seuls sous-espaces vectoriels de X stables par $A_1, \dots, A_p$ sont $\{0\}$ et X , alors tout endomorphisme B de X , commutant à $A_1, \dots, A_p$, est un multiple scalaire de l'identité.
 - (b) La réciproque est-elle vraie ?

Deuxième partie

On définit X et $(x_1, \dots, x_n)$ comme à la première partie. On note K_0 et F_0 les endomorphismes de X définis comme suit :

$$\forall p = 1, \dots, n, \quad K_0 x_p = q^{n+1-2p} x_p, \quad F_0 x_p = \begin{cases} x_{p+1} & \text{si } p < n \\ 0 & \text{si } p = n \end{cases}$$

3. Calculer $K_0 F_0 - q^{-2} F_0 K_0$.
4. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X stables par F_0 , puis ceux stables par F_0 et K_0 . On définit un troisième endomorphisme E_0 de X par

$$E_0 x_p = \begin{cases} (q - q^{-1})^{-2} (q^{p-1} - q^{1-p}) (q^{n+1-p} - q^{p-n-1}) x_{p-1} & \text{si } p > 1 \\ 0 & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

5. Calculer $K_0 E_0 - q^2 E_0 K_0$.
6. Vérifier la relation $E_0 F_0 - F_0 E_0 = (q - q^{-1})^{-1} (K_0 - K_0^{-1})$.
7. Déterminer les sous-espaces vectoriels de X stables par K_0, E_0, F_0 .

Troisième partie

Dans cette partie, on désigne par K et E deux endomorphismes d'un espace vectoriel complexe X de dimension n satisfaisant les conditions suivantes :

- i) $KE = q^2 EK$
- ii) K est inversible
- iii) E est non nul.

Pour tout nombre complexe λ on pose

$$X_\lambda = \text{Ker}(K - \lambda I), \quad Y_\lambda = \text{Ker}(E - \lambda I)$$

8. Vérifier les relations

$$E(X_\lambda) \subset X_{q^2 \lambda}, \quad K(Y_\lambda) \subset Y_{q^{-2} \lambda}$$

9. Montrer que Y_λ est réduit à $\{0\}$ si λ est non nul.
10. Indiquer un nombre entier $r > 0$ tel que $E^r = 0$.
11. Montrer qu'il existe un élément x non nul de $\text{Ker} E$, vecteur propre pour K .

12. On suppose X de dimension 2, et on se propose de démontrer l'existence d'une base (x_1, x_2) de X possédant les propriétés suivantes :

- (P1) $Kx_1 = \lambda x_1$ où λ est un scalaire convenable
(P2) $Kx_2 = q^{-2}\lambda x_2$
(P3) $Ex_1 = 0$
(P4) $Ex_2 = x_1$

- (a) Montrer qu'il existe un vecteur x_1^0 et un scalaire λ tels que l'on ait

$$Kx_1^0 = \lambda x_1^0 \text{ et } Ex_1^0 = 0.$$

On note x_2^0 un vecteur non nul et non proportionnel à x_1^0 .

- (b) Montrer que le vecteur Ex_2^0 , qu'on note x_1 , est un multiple non nul de x_1^0 .
(c) Montrer qu'il existe un scalaire β tel que

$$Kx_2^0 = \beta x_1 + q^{-2}\lambda x_2^0.$$

- (d) Trouver un scalaire α tel que les vecteurs x_1 et $x_2 = x_2^0 + \alpha x_1$ répondent à la question.

Quatrième partie

Dans cette quatrième partie on désigne par X un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 2$ et on considère un triplet (K, E, F) d'endomorphismes de X satisfaisant les conditions suivantes :

- i) K est inversible, $K^2 \neq I$
ii) $KE = q^2 EK$
iii) $KF = q^{-2} FK$
iv) $EF - FE = (q - q^{-1})^{-1}(K - K^{-1})$
v) les seuls sous-espaces vectoriels de X , stables par K, E, F , sont $\{0\}$ et X

13. Vérifier que, pour tout entier $m > 0$, on a

$$EF^m - F^m E = (q - q^{-1})^{-2}(q^m - q^{-m})F^{m-1}(q^{1-m}K - q^{m-1}K^{-1}).$$

Dans ce qui suit, on note ν_1 un vecteur non nul de X , annulé par E et vecteur propre de K pour une certaine valeur propre que l'on notera λ . Pour tout entier $m > 0$, on pose $\nu_m = F^{m-1}\nu_1$.

14. Calculer $K\nu_m$.
15. Démontrer la relation

$$\forall m \geq 2, E\nu_m = (q - q^{-1})^{-2}(q^{m-1} - q^{1-m})(q^{2-m}\lambda - q^{m-2}\lambda^{-1})\nu_{m-1}.$$

16. Démontrer les assertions suivantes :

- (a) Ceux des vecteurs ν_m qui sont non nuls, sont linéairement indépendants.
(b) Il existe $m_0 \geq 1$ tel que $\nu_m = 0$ pour tout $m > m_0$ et que $\nu_1, \dots, \nu_{m_0}$ soient linéairement indépendants.
(c) On a $m_0 = n$
(d) On a $\lambda = \pm q^{n-1}$.

17. Comparer le triplet (K, E, F) avec le triplet (K_0, E_0, F_0) considéré à la deuxième partie.