ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2002

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Dans les trois premières parties, on désigne par
- n et m des entiers > 0 tels que $n \leq m$;
- E l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire usuel $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$;
- e_j, $j = 1, \ldots, m$, des éléments non nuls de E satisfaisant une condition de la forme

$$(1) \qquad \forall x \in E, \alpha \|x\|^2 \leq \sum_j (x|e_j)^2$$

où α est un réel > 0 ;
- T l'endomorphisme de E déni par

$$T(x) = \sum_j (x|e_j)\, e_j.$$

Si S est un endomorphisme de E, sa norme $\|S\|$ est dénie par

$$\|S\| = \sup \{\|S(x) : \|x\| = 1\|\}.$$

Première partie

1. Donner un exemple simple de famille (e_j) satisfaisant une condition de la forme (1).

2. Déterminer le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_j.

3. On prend $n = 2$, $m = 3$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = \left(-\sqrt{3}/2, -1/2\right)$, $e_3 = \left(\sqrt{3}/2, -1/2\right)$. Déterminer $\sum\limits_j (x|e_j)^2$ et T.

4. Vérier que T est autoadjoint, inversible et satisfait $(T(x)|x) \geq \alpha \|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

5. Comparer $\|T\|$ et $\sup \{(T(x)|x) : \|x\| = 1\}$.

6. Trouver un réel β tel que $\left(T^{-1}(x)|x\right) \leq \beta \|x\|^2$ pour tout $x \in E$. Que peut-on dire de $\left\|T^{-1}\right\|$?

7. On suppose que $\alpha \|x\|^2 = \sum\limits_j (x|e_j)^2$ pour tout $x \in E$. Déterminer T.

Deuxième partie

On note F l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$, $(f_1, \ldots, f_m)$ sa base naturelle, $(\cdot|\cdot)_F$ son produit scalaire naturel. On dénit une application linéaire $\Phi : E \to F$ par

$$\Phi(x) = \sum_j (x|e_j)\, f_j.$$

On pourra admettre qu'il existe une unique application linéaire $\Psi : F \to E$ satisfaisant
$(\Psi(h)|x) = (h|\Phi(x))_F$ pour tous $x \in E$, $h \in F$.

8. Vérier que l'on a $\Psi(h) = \sum_j h_j e_j$ et $\Psi \circ \Phi = T$.

On pose $\tilde{e}_j = T^{-1}(e_j)$ et on dénit une application linéaire $\tilde{\Phi} = E \to F$ par

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_j (x|\tilde{e}_j)\, f_j.$$

9. Vérier que l'on a $F = \operatorname{Im} \tilde{\Phi} \oplus (\operatorname{Im} \Phi)^{\perp}$.

10. Étant donné un élément x de E, déterminer le minimum des nombres $\sum_j h_j^2$ pour les familles (h_j) vériant $x = \sum_j h_j e_j$, et préciser pour quelles familles (h_j) ce minimum est atteint.

11. Expliquer ce qui se passe dans chacun des cas suivants

a) les e_j forment une base de E ;

b) les e_j forment une base orthonormale de E ;

c) on a $\alpha \|x\|^2 = \sum_j (x|e_j)^2$ pour tout $x \in E$.

Troisième partie

On se propose, dans cette partie, de résoudre l'équation $T(x) = y$ par une méthode d'itérations successives. On pose

$$a = \inf\{(T(x)|x) : \|x\| = 1\}, b = \|T\| ;$$

on a donc $0 < a \leq b$. Pour tout réel $s > 0$ on pose $V_s = id_E - sT$.

12. Montrer que l'on a

$$\|V_s\| = \max(|1 - as|, |1 - bs|).$$

13. Déterminer le minimum C de la fonction $s \mapsto \|V_s\|$, préciser pour quelle valeur s_0 de s il est atteint, et montrer que $C \in [0, 1[$. À quelle condition C est-il égal à 0 ?
[Il est conseillé de dessiner les courbes représentatives des fonctions $s \mapsto |1 - as|$ et $s \mapsto |1 - bs|$].

On xe un élément y de E et on dénit une application U de E dans lui-même par

$$U(x) = x + s_0(y - T(x)).$$

14. Étant donné x et $x' \in E$, comparer $\|U(x) - U(x')\|$ et $C\,\|x - x'\|$.

15. On désigne par x_0 un élément de E et on pose, pour tout entier $n > 0$, $x_n = U^n(x_0)$.
Étudier le comportement de la suite (x_n). Conclure.

Quatrième partie

Dans cette partie, on désigne par

- E un espace préhilbertien réel ;
- T un endomorphisme continu de E (on ne le suppose pas autoadjoint) ;
- x_0 et y_0 des éléments de E.

Pour tout réel $s > 0$ on dénit une application U_s de E dans lui-même par

$$U_s(x) = x + s\,(y_0 - T(x))\,.$$

16. **a)** Trouver une condition portant sur T suffisante pour que l'on ait une majoration de la forme

$$\|id_E - sT\|^2 \leq 1 - 2as + b^2 s^2$$

avec $a > 0$, b réel.

b) Trouver alors une condition portant sur E, impliquant que la suite $x_n = U_s^n(x_0)$ soit convergente pour un s convenable ; préciser dans ce cas la nature (injectif ?, surjectif ?) de T.

⋆ ⋆
⋆