

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Dure : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté à la précision et à la concision de la rédaction.

On se propose, dans ce problème, de démontrer quelques propriétés des sous-corps du corps des complexes $\mathbb{C}$. On rappelle que, si K est un sous-corps d'un corps K' , ce dernier est, en particulier, un K -espace vectoriel, ce qui donne un sens à la K -dimension de K' , notée $\dim_K(K')$.

Si K est un corps, on note $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K . On dit qu'un polynôme de degré > 0 est *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés > 0 . Un polynôme est *unitaire* si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

La question 1 est classique et servira surtout à fixer quelques notations ; la question 2 n'est pas utilisée dans la suite.

Première partie

On désigne par K un sous-corps de $\mathbb{C}$, par α un nombre complexe non nul, par $K[\alpha]$ le sous- K -espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par les nombres $\alpha^n, n = 0, 1, 2, \dots$, enfin par $I_K(\alpha)$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ annulés par α .

1.a) Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\dim_K(K[\alpha]) < +\infty$
- (ii) $I_K(\alpha) \neq \{0\}$.

Si elles sont remplies, on dit que α est *K -algébrique*, ce que l'on suppose dans la suite de cette question.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in K[X]$ tel que tout élément de $I_K(\alpha)$ soit un multiple de P , et que P est irréductible.

Ce polynôme P sera noté $P_K(\alpha)$ et appelé *polynôme K -minimal* de α .

- c) Comparer le degré de $P_K(\alpha)$ et $\dim_K(K[\alpha])$.
- d) Montrer que $K[\alpha]$ est un corps.

2. Applications numériques. On prend $K = \mathbb{Q}$.

- a) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$ -minimal de $\alpha = \sqrt{2}$.
- b) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$ -minimal de $\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Deuxième partie

On définit K et α comme dans la première partie. On suppose que α est K -algébrique et on pose $n = \dim_K(K[\alpha])$.

3. Montrer que, si P est un élément irréductible de $K[X]$, ses zéros dans $\mathbb{C}$ sont tous simples.

4.a) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les zéros de $P_K(\alpha)$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que, pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe un unique morphisme de K -algèbres σ_i de $K[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\sigma_i(\alpha) = \lambda_i$.

b) Obtient-on de cette façon tous les morphismes de K -algèbres de $K[\alpha]$ dans $\mathbb{C}$?

5. Montrer que si β est un élément de $K[\alpha]$ et si les $\sigma_i(\beta)$ sont deux à deux distincts, alors on a $K[\alpha] = K[\beta]$.

6. Etant donné un élément β de $K[\alpha]$, démontrer l'existence de deux éléments β_1 et β_2 de $K[\alpha]$ vérifiant $K[\beta_1] = K[\beta_2] = K[\alpha]$ et $\beta_1 + \beta_2 = \beta$.

[On pourra introduire, pour $i \neq j$, l'ensemble $E_{i,j}$ des éléments λ de K vérifiant

$$\sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta)]$$

Troisième partie

On fixe un nombre complexe $\mathbb{Q}$ -algébrique non nul θ , et on pose $K = \mathbb{Q}[\theta]$, $n = \dim_{\mathbb{Q}}(K)$. On note σ_i , $i = 1, \dots, n$, les morphismes de $\mathbb{Q}$ -algèbres de K dans $\mathbb{C}$.

Dans ce qui suit, α désigne un élément de K ; on appelle M_α l'endomorphisme du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel K défini par $M_\alpha(\beta) = \alpha\beta$ pour tout $\beta \in K$, et Δ_α son polynôme caractéristique défini par $\lambda \mapsto \det(\lambda I - M_\alpha)$.

7. On pose $m = \dim_{\mathbf{Q}}(\mathbb{Q}[\alpha])$, $d = \dim_{\mathbf{Q}[\alpha]}(K)$. Vérifier que, si $(e_1, \dots, e_d)$ est une $\mathbb{Q}[\alpha]$ -base de K , les éléments $\alpha^p e_r$ où $p = 0, \dots, m-1$ et $r = 1, \dots, d$, forment une $\mathbb{Q}$ -base de K .

8.a) Démontrer l'égalité $\Delta_\alpha = (P_{\mathbf{Q}}(\alpha))^d$.

[On pourra examiner d'abord le cas où $\mathbb{Q}[\alpha] = K$]

b) Démontrer l'égalité $\text{Tr}(M_\alpha) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\alpha)$.

9. Pour tout n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de K^n , on pose

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det \left(\text{Tr}(M_{\alpha_i \alpha_j}) \right)_{i,j=1, \dots, n}.$$

Exprimer $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en fonction de $\det (\sigma_i(\alpha_j))_{i,j=1, \dots, n}$.

10. Soit $A = (A_{i,j})_{i,j=1, \dots, n}$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et soit $\beta_i = \sum_{p=1}^n A_{i,p} \alpha_p$.

Vérifier que

$$D(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\det A)^2 D(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

11. Montrer que

$$D(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)).$$

12. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, pour qu'un n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ soit une $\mathbb{Q}$ -base de K .

13.a) Vérifier que le polynôme $X^3 - X - 1$ admet un unique zéro réel, que l'on note θ .

b) Déterminer le polynôme $\mathbb{Q}$ -minimal de θ .

c) Calculer $D(1, \theta, \theta^2)$.

★ ★
★