Mines MP 1

CPGE ERA Marrakech : a.khchine@gmail.com

Définitions et notations

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coéfficients complexes .On note 0_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
La trace d'une matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $tr(U)$.
On dit que deux matrices U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent si $UV = VU$.
Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente s'il éxiste un entier $k > 0$ pour lequel $N^k = 0_n$.
Dans tout le problème , on considère une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé , c'est à dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A. Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ .Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$ on note :

- α_i est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i , c'est à dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P.
- P_i le polynôme défini par $P_i(X) = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$.
- F_i le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = Ker\left((f_i - \lambda_i\, id_{C^n})^{\alpha_i}\right)$.
- f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i

La partie **2** , à l'exception de la question **1.1)** est indépendante de la partie 1 .
La partie **3** est indépendante des partie précédentes.

1 Décomposition de Dunford

1) Justifier que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est somme directe des espaces F_i :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

2) En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente , montrer que pour tout $i = 1..r$, le polynôme caractéristique de f_i est P_i.
(On pourra d'abord établir que P_i est un polynôme annulateur de f_i) .

3) Montrer qu'il éxiste une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice définie par bloc de la forme suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & . \\ . & & & . & . & 0 \\ 0 & & . & . & . & \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 \end{pmatrix}.$$

où $N_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ est nilpotnte pour tout $i = 1..r$

4) En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = D + N$ où D est une matrice diagonalisable et N est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent.

Les matrices D et N vérifiant ces condition constituent la décomposition de Dunford de la matrice A.Dans toute la suite du problème , on admettra l'unicité de cette décomposition , c'est-à-dire que D et N sont déterminés de façon unique par A.

5) Calculer la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2 Commutation et conjuguaison

Pour toute matrice 2 et toute matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $comm_B$ et $conj_P$ les endomorphismes
de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \begin{cases} comm_B(X) = & BX - XB \\ Conj_P(X) = & PXP^{-1} \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si, et seulement si $comm_A$ est diagonalisable

6) Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.Calculer $conj_{P^{-1}}\ o\ comm_A\ o\ conj_P$.

Pour touts $1 \leq i,j \leq n$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coéfficients sont nuls , sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1.

7) Si A est une matrice diagonale , montrer que pour tous $1 \leq i,j \leq n$, $comm_A$ admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre .Déterminer l'ensemble des valeurs propres de $comm_A$.

8) En déduire que si A est diagonalisable , $comm_A$ l'est aussi.

9) Montrer que si A est nilpotente ,$comm_A$ l'est également , c'est-à-dire qu'il éxiste un entier k>0 pour lequel $(Comm_A)^k$ est l'endomorphisme nul.

10) Montrer que si A est nilpotente , et si $comm_A$ est l'endomorphisme nul , alors A est la matrice nulle.

D'aprés **la partie** 1 , l'endomrphisme $comm_A$ admet une décomposition de Dunford de la forme $comm_A = d + n$, $où$ les endomorphismes d ,diagonalisable, et n, nilpotent, commutent : $dn = nd$.

11) Déterminer la décomposition de Dunford de $comm_A$ à l'aide de celle de A et conclure.

3 Forme bilinéaire sur un espace vectoriel complexe

Soit p un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension p .
On note $E^\star$ le dual de E , c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaire sur E.
On considère une forme bilinéaire symétrique b sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une application $b : E \times E \to \mathbb{C}$ linéaire par rapport à chacune de ses deux composantes (et **non** sesquilinéaire par rapport à la deuxième) et telle que $b(x,y) = b(y,x)$ pour tous $x, y \in E$.
Si F est un sous espace vectoriel de E , on appelle orthogonal de F relativement à b le sous espace vectoriel de E défini par :

$$F^{\perp_b} = \{x \in E\,, \forall y \in F\ \ b(x,y) = 0\}$$

On suppose que b est non dégénrée , c'est-à-dire que $E^{\perp_b} = \{0\}$

12) Soit u unn endomorphisme de E .Démontrer les implications suivantes :
$(i) u$ est diagonalisable $\Rightarrow (ii) Ker\, u = Ker\, u^2 \Rightarrow (iii) Ker\, u \cap Im\, u = \{0\}$.

Soit F un sous espace vectoriel de E , de dimension q , et soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_q)$ une base de F. Pour tout $i = 1..q$, on note φ_i la forme linéaire de E définie par $\varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$

13) Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q)$ est une famille libre de $E^\star$.

On complète cette famille en une base $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ de $E^\star$ et on note $(e_1, e_2, ..., e_p)$ la base de E antéduale (dont $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p)$ est la base duale).

14) Montrer que $F^{\perp_b}$ est engendré par $(e_{q+1}, e_{q+2}, ..., e_p)$ et en déduire la valeur de $dim\, F + dim\, F^{\perp_b}$.

4 Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $Ker\,(comm_A) = Ker\,((comm_A)^2)$.

15) Montrer que l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, définie par la formiule $\varphi(X,Y) = tr(X\,Y)$ pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée .

16) Établir l'égalité $[Ker\,(comm_A)]^{\perp_\varphi} = Im\,(comm_A)$.

17) En déduire que si A est nilpotente , il éxiste une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = comm_A(X)$.

Calculer alors $comm_{A+\lambda\, I_n}(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A définies à la question 4).

18) Démontrer qu'il éxiste une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N = comm_A(X)$.

19) Conclure.