Préambule

Pour tout entier naturel k on définit le polynôme Γ_k par :

$$\Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = X, \quad \Gamma_2 = \frac{X(X-1)}{2}, \quad \dots \quad \Gamma_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de ces polynômes et des séries du type $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$ où x est une variable réelle et $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle.

Partie I

On étudie dans cette partie quelques propriétés des polynômes Γ_k.

1) Montrer que pour tout entier relatif x, $\Gamma_k(x)$ est aussi un entier relatif. Calculer $\Gamma_k(k)$ et $\Gamma_k(-1)$.

2) Établir pour tout entier $n \geqslant 1$ les formules :

$$\Gamma_n(X+1) - \Gamma_n(X) = \Gamma_{n-1}(X), \qquad n\Gamma_n(X) = (X-n+1)\Gamma_{n-1}(X).$$

3) Soit un polynôme Q de degré n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
- Pour tout entier relatif x, $Q(x)$ est un entier relatif.
- Il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs $x_0, \dots, x_n$ tels que les $Q(x_i)$ soient des entiers relatifs.
- Il existe des entiers relatifs $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $Q(X) = a_0 + a_1\Gamma_1(X) + \dots + a_n\Gamma_n(X)$.

On pourra observer que tout polynôme est une combinaison linéaire des polynômes Γ_k, et raisonner par récurrence sur le degré de Q.

4) Soit une fraction rationnelle $F = P/Q$, où P et Q sont deux polynômes réels. On suppose qu'il existe un entier N tel que, pour tout n entier au moins égal à N, $F(n)$ soit entier relatif. Montrer que F est un polynôme satisfaisant aux conditions de **3)**. On pourra utiliser une récurrence sur d, d désignant le degré de F, c'est-à-dire la différence entre le degré de P et le degré de Q.

Partie II

1) Soit f une application de $[\alpha, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, où $\alpha \leqslant 0$.

a) Montrer qu'il existe une suite de réels (a_n) et une seule possédant la propriété suivante : pour tout n, la fonction $f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(x)$ est nulle pour x égal aux $n+1$ entiers consécutifs $0, 1, 2, \dots, n$.

La suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ sera dite suite associée à la fonction f.

b) Montrer que la suite associée à la fonction $x \longmapsto b^x$ $(b > 0)$ est $a_n = (b-1)^n$.

2) a) On suppose de plus ici que f est de classe infinie. On donne un réel $x \geqslant \alpha$. Montrer qu'il existe, pour tout entier naturel N, un réel θ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k\Gamma_k(x) + \Gamma_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\theta).$$

On pourra utiliser la fonction auxiliaire qui à t associe $f(t) - \sum\limits_{k=0}^{N} a_k\Gamma_k(t) - A\Gamma_{N+1}(t)$ où A est une constante convenablement choisie et appliquer le théorème de Rolle.

b) En déduire que, pour tout n entier naturel, il existe un réel positif λ_n tel que $a_n = f^{(n)}(\lambda_n)$.

3) Caractériser les nombres réels r possédant la propriété suivante : pour tout entier strictement positif n, n^r est un entier. On pourra, p étant un entier naturel, utiliser la suite associée à la fonction $x \longmapsto (p+x)^r$, et faire tendre p vers $+\infty$.

Partie III

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite donnée de nombres réels. On lui associe la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$. Dans cette partie, on étudie les propriétés de cette série.

1) Soit x un réel fixé, non égal à un entier naturel. On considère la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\mu_n = n^\rho|\Gamma_n(x)|$.

a) Étudier, selon le réel ρ, la nature de la série de terme général $u_n = \ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n)$.

b) Que peut-on en conclure pour la suite μ_n ? Montrer qu'il existe un réel strictement positif $K(x)$, tel que l'on ait, quand n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{x+1}|\Gamma_n(x)| = K(x).$$

On ne cherchera pas à calculer $K(x)$.

2) Soit f une application de classe infinie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout y positif et tout entier n supérieur ou égal à n_0, $|f^{(n)}(y)| \leqslant Mn$, M étant une constante strictement positive.

a) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite associée à f, selon la définition donnée en **II-1a)**. Montrer que l'on a pour tout réel positif x : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$.

b) Que peut-on dire de f si cette fonction est nulle pour tout entier naturel ?

3) Soient x et y deux réels, tous deux distincts d'un entier naturel. On suppose $y > x$. Que dire de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(y)$ si la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$ converge absolument ?

4) Soit x_0 un réel non entier naturel, b un entier strictement supérieur à $|x_0|$. Soit x un réel appartenant à $]x_0, b]$. On pose $w_n(x) = \Gamma_n(x)/\Gamma_n(x_0)$.

a) Établir que la suite $(w_n(x))_{n\geqslant b}$ est monotone et tend vers zéro.

b) En déduire l'existence d'une constante K telle que, pour tout x appartenant à $[x_0, b]$, et pour tout $n \geqslant b$, $\Gamma_n(x)| \leqslant K|\Gamma_n(x_0)|$.

c) Montrer que, si la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x_0)$ converge absolument, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$ converge normalement sur tout compact de $[x_0, +\infty[$.

5) On admet le théorème (T) suivant :

Soit une série numérique convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ *et une suite* $(V_n)_{n\geqslant 0}$ *d'applications d'un intervalle* I *dans* $\mathbb{R}$*, telle que :*

- *pour tout* x *de* I*, la suite* $n \longmapsto V_n(x)$ *est décroissante*
- *il existe* M *réel tel que, pour tout* x *de* I *et tout* n *entier naturel :* $|V_n(x)| \leqslant M$*,*

alors la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n V_n(x)$ *converge uniformément dans* I*.*

a) Déduire de ce théorème que, si la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$ converge en un point x_0 (x_0 non entier naturel), alors elle converge uniformément sur tout compact de $[x_0, +\infty[$.

b) Montrer de plus qu'il y a convergence absolue sur $]x_0 + 1, +\infty[$.

6) On considère, dans cette question, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h^n\Gamma_n(x)$.

a) On suppose $|h| < 1$. Pour quels x la série est-elle convergente ? Quelle est alors sa somme ?

b) Que se passe-t-il lorsque $|h| > 1$?

c) On prend $h = 1$. Pour quels x la série converge-t-elle ? Montrer que la somme est égale à 2^x. On pourra appliquer **II-2a)** et s'en servir pour déterminer le signe de $2^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \Gamma_k(x)$.

d) On prend $h = -1$. Pour quels x la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\Gamma_n(x)$ est-elle absolument convergente ? Pour quels x est-elle convergente ? Soit $\sigma(x)$ sa somme ; donner $\sigma(x)$ lorsque x est entier naturel.

e) On fixe x strictement positif, et l'on pose, t décrivant $[0,1]$: $\varphi_x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \Gamma_n(x)$. Reconnaître, pour $t \neq 1$, cette fonction. Établir que la série ci-dessus converge normalement en t sur $[0,1]$. En déduire $\sigma(x)$.

Partie IV

On considère dans cette partie des fonctions de la forme $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{0}(1+t)^x h(t)\,\mathrm{d}t$ où h est une application continue de $[-1,0]$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que, pour $x > 0$, on a la relation : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(\displaystyle\int_{-1}^{0} t^n h(t)\,\mathrm{d}t\Big)\Gamma_n(x)$. (1)

2) h désigne une fonction définie et continue sur $[-1,0]$. On suppose $x > -1$. Établir à l'aide de la formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale la relation, pour tout entier N

$$(1+t)^x = \sum_{0\leqslant n\leqslant N} t^n \Gamma_n(x) + R_N(t,x) \text{ où } R_N(t,x) = (N+1)\Gamma_{N+1}(x)\int_0^t \Big(\frac{t-u}{1+u}\Big)^N (1+u)^{x-1}\,\mathrm{d}u.$$

3) Conservant les hypothèses du **2)** on étudie ici $\lim\limits_{N\to\infty}\displaystyle\int_{-1}^{0} h(t)R_N(t,x)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que I'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} h(t)R_N(t,x)\,\mathrm{d}t$ converge.

b) À l'aide du changement de variable $s = \dfrac{t-u}{1+u}$ établir pour $|t| < 1$

$$R_N(t,x) = (N+1)\Gamma_{N+1}(x)(1+t)^x\int_0^t (s+1)^{-x-1}s^N\,\mathrm{d}s.$$

c) En posant $r_N(t) = \displaystyle\int_0^t (s+1)^{-x-1}s^N\,\mathrm{d}s$ et $H(t) = \displaystyle\int_{-1}^{t}(1+s)^x h(s)\,\mathrm{d}s$, établir, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_{-1}^{0} R_N(t,x)h(t)\,\mathrm{d}t = -(N+1)\Gamma_{N+1}(x)\int_{-1}^{0} H(t)(1+t)^{-x-1}t^N\,\mathrm{d}t.$$

4) Montrer que l'application $t \longmapsto |H(t)(1+t)^{-x-1}|$ est bornée. En déduire que la relation (1) est vérifiée pour $x > -1$.

5) On prend ici $h(t) = (1+t)^\lambda$, où $\lambda \geqslant 0$.

a) Pour quelles valeurs de x l'intégrale définissant f a-t-elle un sens ?

b) Calculer $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} t^n h(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.

c) Établir, pour $x > -1$ la relation : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Gamma_n(x)$. (2)

d) En utilisant les pôles et les zéros de la différence $f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} a_n\Gamma_n(x)$ déterminer les valeurs réelles de x pour lesquelles la relation (2) est valable.