MATHEMATIQUES I

Concours d'Admission 1990 **M P'**

PREAMBULE

Dans tout le texte, z désigne une variable complexe ; l'exponentielle de z sera notée indifféremment e^z et exp z, la partie réelle de z sera notée Re(z). On appellera Δ l'ensemble des nombres complexes de module strictement inférieur à 1. On conviendra de poser $0^\circ = 1$.

On définit une application F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ comme suit :

- $F(1) = 0$
- pour tout $z \neq 1$, $F(z) = \exp\left(-\dfrac{z}{1-z}\right)$

Le but du problème est d'établir que F est développable en série entière dans Δ et d'étudier quelques propriétés de la suite des coefficients de cette série entière.

La seconde et la troisième partie sont indépendantes.

PREMIERE PARTIE

On **admettra** le théorème (T) suivant :

Soit $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ une "suite double" à termes complexes, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$, vérifiant les hypothèses suivantes :

(H1) • pour tout n, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{n,k}|$ est convergente,

(H2) • la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} s_n$, où $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}|$, est convergente.

Alors les deux membres de l'égalité ci-dessous ont un sens et sont égaux :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k}\right)$$

I.1. Soit n un entier naturel. Etablir que la fonction qui, à tout $z \neq 1$, associe $\left(\dfrac{z}{1-z}\right)^n$ admet un développement en série entière dans Δ, développement que l'on notera $\left(\dfrac{z}{1-z}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$

Montrer que les $a_{n,k}$ sont des entiers naturels.

I.2. En utilisant le développement en série entière de $(1+x)^\gamma$, où γ est une constante réelle convenable et x une variable réelle comprise strictement entre -1 et 1, déterminer $a_{n,k}$ en fonction de n et de k.

I.3.a) Montrer que l'égalité $b_k = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{a_{n,k}}{n!}$

définit une suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels.

b) Calculer b_0, b_1, b_2.

I.4. Etant donné z appartenant à Δ, établir que la "suite double" définie pour tout couple (n,k) d'entiers naturels par $u_{n,k} = (-1)^n \dfrac{a_{n,k}}{n!} z^k$ satisfait aux hypothèses du théorème (T).

I.5. Déduire de ce qui précède que, pour tout z appartenant à Δ, l'on a :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

On désignera par R le rayon de convergence de la série entière ci-dessus (on a évidemment $R \geq 1$).

DEUXIEME PARTIE

On se propose dans cette partie de déterminer R et de trouver une suite majorant la suite $|b_n|$.

On désigne par Δ' l'ensemble des z vérifiant $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$. On confondra dans le langage les nombres complexes et les points du plan complexe les représentant.

II.1.a) Pour tout z complexe, on pose $z = x + iy$, x et y étant réels ; calculer $\ln|F(z)|$ en fonction de x et y.

b) Etant donné un réel λ positif au sens large, on appelle C_λ l'ensemble des z vérifiant $|F(z)| = \lambda$

Déterminer une équation cartésienne de C_λ ; indiquer la nature et la position de C_λ.

Tourner la page

c) Tracer sur un même graphique les C_λ correspondant à $\lambda = \frac{1}{e}, 1, \sqrt{e}, e, e^2$.

II.2. Quelle est la borne supérieure de $|F(z)|$ lorsque z décrit Δ' ? Est-elle atteinte ? Si oui, en quels points ?

II.3.a) Montrer que F est continue en tout point autre que 1.

b) F est-elle continue au point 1 ?

c) La restriction de F à Δ a-t-elle une limite au point 1 ?

II.4. Déduire de **II.3.** la valeur de R (voir **I.5**).
La série $\sum |b_n|$ est-elle convergente ?

II.5.a) On donne r compris strictement entre 0 et 1. Etablir les formules valables pour tout n entier naturel :

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} F\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta\right)$$

b) Etablir que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} F\left(e^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta$ est convergente.

c) Démontrer que l'on a

$$\lim_{r \to 1^-} \int_0^{\pi} F\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} F\left(e^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\, d\theta$$

On pourra, ε étant choisi ($\varepsilon > 0$), partager $[0, \pi]$ en 2 intervalles : $[0, \varepsilon]$, $[\varepsilon, \pi]$.

II.6. En déduire la formule :

$$b_n = \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(2int + \frac{i}{2\tan t}\right) dt\right)$$

II.7. Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et donner une constante majorant $|b_n|$.

II.8. On pose, pour tout t compris strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et pour tout n entier strictement positif : $u_n(t) = 2nt + \frac{1}{2\tan t}$

Etudier les variations et le signe des fonctions u_n, u'_n, u''_n. Expliciter en fonction de n la valeur T_n de l'unique zéro de u'_n.

II.9.a) Etablir, pour tout $n > 0$, l'existence et l'unicité d'un couple α_n, β_n de réels tels que : $0 < \alpha_n < T_n < \beta_n < \frac{\pi}{2}$

et $u'_n(\beta_n) = -u'_n(\alpha_n) = n^{3/4}$

b) Démontrer l'inégalité $u''_n(\beta_n) \geq 2\,n^{3/2}$

c) En déduire une majoration de $(\beta_n - \alpha_n)$.

II.10. Pour tout $n > 0$, on appelle respectivement I_n, J_n, K_n et L_n les intégrales de la fonction $t \to \exp(iu_n(t))$ sur les intervalles $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \alpha_n]$, $[\alpha_n, \beta_n]$, $\left[\beta_n, \frac{\pi}{2}\right]$

a) Donner une majoration de $|K_n|$.

b) En écrivant : $\displaystyle L_n = \int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{iu'_n(t)} \cdot e^{iu_n(t)}\, iu'_n(t)\, dt$

établir l'inégalité $|L_n| \leq \dfrac{2}{n^{3/4}}$

c) Majorer par la même technique $|J_n|$.

d) Déduire de ce qui précède une majoration de $|b_n|$ du type $C\,n^{-3/4}$ où C est une constante entière, qui soit valable pour tout n. On ne cherchera pas la meilleure valeur possible de C.

TROISIEME PARTIE

Cette partie est indépendante de la précédente. Elle a pour but essentiel une étude sommaire de la variation du signe de b_n en fonction de n.

III.1. Déterminer une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 vérifiée par F(x) lorsque x décrit $]-1, 1[$.

III.2. On pose, dans toute la suite du problème, $C_n = n\,b_n$ pour tout n.

a) Etablir la relation de récurrence (R) :

Tourner la page.

$$C_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n}\right) C_n - C_{n-1} \qquad \text{pour tout } n > 0$$

b) Déterminer C_n pour n allant de 0 à 6.

c) Montrer que s'il existe n non nul tel que $C_n = 0$, alors C_{n-1} et C_{n+1} sont non nuls et de signes opposés.

III.3. On pose, pour tout n entier strictement positif : $d_n = C_n - C_{n-1}$

Démontrer les formules :

$$C_{n+h} = C_n + d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{n+h} \qquad (n \geq 0,\ h \geq 1)$$

$$d_{n+1} = d_n - \frac{C_n}{n} \qquad (n \geq 1)$$

$$d_{n+h} = d_n - \left(\frac{C_n}{n} + \frac{C_{n+1}}{n+1} + \dots + \frac{C_{n+h-1}}{n+h-1}\right) \qquad (n \geq 1,\ h \geq 1)$$

III.4. On suppose, dans cette seule question, qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $C_n > 0$

Etablir que la suite $(d_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. Cette suite a donc une limite L finie ou non. En distinguant suivant les valeurs de L et en utilisant les relations établies dans la question précédente, aboutir à une contradiction.

III.5. On peut donc définir (on ne demande pas de le justifier) une suite $(\theta(n))_{n \geq 1}$ strictement croissante et à valeurs entières, possédant les propriétés suivantes :

- $\theta(1) = 0$
- $(-1)^n C_{\theta(n)} \geq 0$
- Pour tout k tel que $\theta(n) < k < \theta(n+1)$, l'on a $(-1)^n C_k > 0$.

On note U_n l'intervalle $[\ \theta(n), \theta(n+1)\ [$ et $M_n = \max_{k \in U_n} |C_k|$

Dans la suite de cette question on suppose que n est pair.

a) Etablir les inégalités :

$$0 \leq C_{\theta(n)} < C_{\theta(n)+1}\ , \qquad C_{\theta(n+1)-2} > C_{\theta(n+1)-1} > 0$$

En déduire une minoration de la longueur de U_n.

b) Etudier les variations de d_p lorsque p varie de $\theta(n)$ à $\theta(n+1)$.

c) En déduire les variations de C_p quand p décrit U_n.

d) En utilisant **III.5.a**, établir que si p, q, r appartiennent à U_n et vérifient $p < q < r$, on a alors : $\dfrac{C_q - C_p}{q - p} > \dfrac{C_r - C_q}{r - q}$

Faire une figure représentant l'ensemble des points de coordonnées (k, C_k), k décrivant U_n ; interpréter géométriquement l'inégalité précédente.

e) Indiquer très sommairement ce que deviennent les résultats ci-dessus pour n impair.

M Seul

III.6.a) Soit n un entier pair et h un entier vérifiant $0 \leq h < \theta(n+1) - \theta(n)$.

Etablir la relation $C_{\theta(n)+h} \leq (h+1)\, d_{\theta(n)}$.

b) En déduire $\qquad d_{\theta(n)+h} \geq d_{\theta(n)} \left(1 - \dfrac{h(h+1)}{2\,\theta(n)}\right)$

c) Soit ω_n le plus petit entier k de U_n tel que $C_k = M_n$.

Donner une minoration de $\omega_n - \theta(n)$ ne faisant intervenir que $\theta(n)$.

d) Montrer que la minoration obtenue est valable aussi pour n impair.

Quelle est la limite de $\theta(n+1) - \theta(n)$ quand n tend vers $+\infty$?

(P' : III.6.)

III.7. On cherche à préciser numériquement $\theta(n)$. Soit N un entier donné.

Décrire (en français) un algorithme permettant de calculer les valeurs de $\theta(n)$ pour n variant de 1 à N.

Déterminer ces valeurs pour $N = 10$.

*** FIN ***