# L'usage des machines à calculer est interdit

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le demi-plan ouvert $\mathcal{P}$ d'équation $y>0$. Si $f\ :\ (x,y)\ \mapsto\ f(x,y)$ est une fonction définie sur un ouvert $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ de $\mathbb{R}^2$, on appelle laplacien de $f$ et on note $\Delta f$ l'opérateur différentiel défini,quand il existe, par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

On appelle fonction harmonique sur un ouvert $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ de $\mathbb{R}^2$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie sur $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\Delta f=0$ en tout point de $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ .

Les deux premières parties du problème consistent en l'étude de quelques exemples de fonctions harmoniques sur le demi-plan $\mathcal{P}$ et les deux suivantes en une caractérisation des fonctions harmoniques. Les quatre parties sont relativement indépendantes et peuvent être traitées en admettant les résultats précédents. On justifiera toutes les réponses.

On rappelle le théorème de Green-Riemann :

si $\mathcal{D}$ est un domaine fermé et borné dont la frontière $\Gamma$ est un arc de courbe de classe $\mathcal{C}^1$ orienté dans le sens direct et si $P$ et $Q$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant $\mathcal{D}$, on a :

$$\iint_{\mathcal{D}}(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\Gamma^+}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

## 1 re partie

On définit la fonction $G$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ par $G(x,y)=\arctan(\dfrac{x}{y})$.

**1°)** Montrer que $G$ est une fonction harmonique sur $\mathcal{P}$.

**2°)** Déterminer toutes les applications $\varphi$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'application $F$ définie par $F:(x,y)\mapsto \varphi(\dfrac{x}{y})$ soit harmonique sur $\mathcal{P}$.

**3°)** Pour tout réel non nul $t$, démontrer l'égalité :

$$\arctan t+\arctan\frac{1}{t}=\text{sgn}\,(t)\frac{\pi}{2}$$

où sgn est la fonction signe définie par $\begin{array}{lll}\text{sgn}\,(t)=1 & \text{si} & t>0\\ \text{sgn}\,(t)=-1 & \text{si} & t<0\end{array}$ .

**4°)** On définit, pour tout complexe non nul, la fonction Arg de telle sorte que •Arg $(z)$ soit un argument du complexe $z$ •Arg $(z)\in]-\pi,\pi]$ .

Exprimer $G(x,y)$ à l'aide de Arg $(x+iy)$ pour tout $(x,y)$ de $\mathcal{P}$.

**5°)** Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}}G(x,y)$. *On discutera selon $x$ et on notera $g(x)$ cette limite.*

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t$ existe pour tout $(x,y)$ de $\mathcal{P}$ et l'exprimer à l'aide de $G(x,y)$.

## 2 e partie

**1°)** On considère dans le plan la famille $\mathcal{F}$ de coniques d'équation :

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\alpha-1}=1$$

Étudier, suivant le paramètre réel $\alpha$, la nature de ces coniques.

Montrer qu'elles ont même foyers.

**2°)** Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{P}$.

Si $x_0\neq 0$, étudier la fonction $\psi$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\qquad \psi:\alpha\mapsto\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\alpha-1}-1$

En déduire que, pour tout point $(x_0, y_0)$ de $\mathcal{P}$, avec $x_0 \neq 0$, il passe exactement deux coniques de la famille $\mathcal{F}$. Montrer qu'elles sont de natures différentes.

Soient $\alpha_1$ et $\alpha_2$ les paramètres correspondants. Exprimer $\alpha_1.\alpha_2$ et $\alpha_1 + \alpha_2$.

Que se passe-t-il pour les points où $x_0 = 0$ ?

**3°)** Si $M_0(x_0, y_0)$ est un point de $\mathcal{P}$ avec $x_0 \neq 0$, montrer que les droites passant par $M_0$ et tangentes respectivement à chacun des deux coniques de la famille $\mathcal{F}$ passant par $M_0$ sont orthogonales.

**4°)** On donne les fonctions $x$ et $y$ définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $\begin{array}{l}(u,v) \mapsto x(u,v) = \operatorname{ch} u \cos v \\ (u,v) \mapsto y(u,v) = \operatorname{sh} u \sin v\end{array}$

Montrer qu'elles sont harmoniques.

Soit $H$ la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$(u,v) \mapsto H(u,v) = (x(u,v), y(u,v)).$$

Écrire la matrice jacobienne de $H$.

Le jacobien de $H$ peut-il s'annuler ?

**5°)** Montrer que les images par $H$ des droites d'équation $u = u_0$ et $v = v_0$, où $u_0$ et $v_0$ sont réels, appartiennent à la famille $\mathcal{F}$ ou sont contenues dans les axes $x'0x$ ou $y'Oy$.

Examiner les cas particuliers.

Étudier la réciproque.

En déduire que $H$ détermine une bijection de $]0, +\infty[\times]0, \pi[$ sur $\mathcal{P}$.

**6°)** Calculer $\Delta(f \circ H)$ à l'aide de $\Delta f$.

Si $f$ est harmonique sur $\mathcal{P}$, en déduire que $f \circ H$ est harmonique sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[$.

## 3 e partie

Soit $(a, b)$ un point de $\mathcal{P}$ et $r$ un réel vérifiant $0 \leqslant r < b$. On note $\mathcal{D}_r$ le disque fermé de centre $(a, b)$ et de rayon $r$. À la fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur $\mathcal{P}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on associe les deux nombres :

$$m(a,b,r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\cos\vartheta, b + r\sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta$$

et $$M(a,b,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2} \displaystyle\iint_{\mathcal{D}_r} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v & \text{si} \quad r \neq 0 \\ f(a,b) & \text{si} \quad r = 0 \end{cases}$$

Dans toute cette partie, $(a, b)$ est un point fixé de $\mathcal{P}$ et $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur $\mathcal{P}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

**1°)** Pour $r$ vérifiant $0 < r < b$, établir les deux égalités :

$$\iint_{\mathcal{D}_r} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\pi \int_0^r \rho m(a,b,r)\,\mathrm{d}\rho$$

$$\iint_{\mathcal{D}_r} \Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = f \int_0^{2\pi} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a + r\cos\vartheta, b + r\sin\vartheta)\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}(a + r\cos\vartheta, b + r\sin\vartheta)\sin\vartheta\Big)\,\mathrm{d}\vartheta$$

**2°)** Montrer que la fonction $r \mapsto m(a,b,r)$ est continue sur $[0, b[$.

**3°)** Montrer que la fonction $r \mapsto M(a,b,r)$ est continue sur l'intervalle ouvert $]0, b[$. Est-elle continue à droite en $r = 0$ ? Justifier.

**4°)** Montrer que la fonction $r \mapsto m(a,b,r)$ est dérivable sur $]0, b[$ et établir la relation :

$$\frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{\mathcal{D}_r} \Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

**5°)** Montrer que la fonction $r \mapsto M(a,b,r)$ est dérivable sur $]0, b[$ et établir la relation :

$$\frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \frac{2}{r}(m(a,b,r) - M(a,b,r))$$

## 4 e partie

On reprend les notations de la troisième partie et on dit que la fonction $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ possède la propriété de moyenne circulaire (respectivement de moyenne spatiale) sur $\mathcal{P}$ si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$ et si elle vérifie la relation $f(a,b) = m(a,b,r)$ (respectivement $f(a,b) = M(a,b,r)$) pour tout $(a,b)$ de $\mathcal{P}$ et tout $r$ tel que $0 < r < b$.

**1°)** Si $f$ est harmonique sur $\mathcal{P}$ et $(a,b) \in \mathcal{P}$, montrer que la fonction $r \mapsto m(a,b,r)$ est constante sur son domaine de définition.

En conclure que $f$ vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$.

**2°)** Si $f$ possède le propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, montrer qu'elle possède la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$.

**3°)** Établir la réciproque de la propriété précédente.

**4°)** Si $f$ vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, montrer que les dérivées partielles d'ordre un de $f$ vérifient la même propriété. En déduire que $\Delta f$ la vérifie aussi.

**5°)** En supposant que $f$ vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, démontrer l'égalité suivante pour tout $(a,b)$ de $\mathcal{P}$ et tout $r$ vérifiant $0 < r < b$ :

$$\iint_{\mathcal{D}_r} \Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$$

En déduire que $f$ est harmonique sur $\mathcal{P}$.