BANQUE FILIERE PT **Epreuve de Mathématiques I-A**

****

Les quatre parties sont presque indépendantes :
seule la question 3 de la Partie II fait appel aux résultats de la Partie I.

****

Partie I

Soient a, b et c trois réels fixés. On définit par récurrence la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante : $v_0 = a$, $v_1 = b$, $v_2 = c$ et pour tout $n\geq 0$,

$$v_{n+3} = \frac{v_{n+2} + v_{n+1} + v_n}{3}.$$

Pour tout $n\geq 0$, on définit le vecteur

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}.$$

On pose également

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que pour tout $n\geq 0$, $V_{n+1} = A \times V_n$. En déduire par récurrence que pour tout $n\geq 1$,

$$V_n = A^n \times V_0.$$

2) a) Montrer que 1 est valeur propre de la matrice A.

b) Déterminer les deux autres valeurs propres (que l'on notera λ_2 et λ_3) de A. Sont-elles réelles ? Calculer leur module.

c) A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

3) a) Montrer que (si n est un entier supérieur à 1) les trois valeurs propres de A^n sont 1, λ_2^n et λ_3^n.

b) En déduire qu'il existe trois nombres complexes α, β et γ (que l'on ne cherchera pas à calculer) tels que pour tout $n\geq 1$,

$$v_n = \alpha + \beta\lambda_2^n + \gamma\lambda_3^n.$$

c) Montrer que pour tout $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$,

$$\lim_{n\to+\infty} x^n(v_n - \alpha) = 0.$$

Montrer que la suite v_n converge vers α et que $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) On pose pour tout $n\geq 0$,

$$w_n = v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2}.$$

Montrer que pour tout $n\geq 0$, $w_{n+1} = w_n$ et en déduire que $\alpha = \dfrac{a + 2b + 3c}{6}$.

Partie II

On se donne dans cette partie une suite $(u_n, n\geq 0)$ à valeurs réelles qui converge vers un nombre $u > 0$. On suppose de plus qu'il existe $\mu \in \left]0, 1\right[$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - u}{\mu^n} = 0.$$

1) a) Déterminer le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$.

   b) On définit le rayon de convergence $\tilde{\rho}$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} (u_n - u)x^n$. Montrer que $\tilde{\rho}\geq\dfrac{1}{\mu}$.

2) Pour tout $x \in \left]-\rho, \rho\right[$, on pose

$$U(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$$

et pour tout $x \in \left]-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}\right[$, on pose

$$\tilde{U}(x) = \sum_{n\geq 0} (u_n - u)x^n.$$

   a) Montrer que pour tout $x \in \left]-\rho, \rho\right[$,

$$U(x) = \tilde{U}(x) + \frac{u}{1-x}.$$

   b) Montrer que $\tilde{U}$ est continue sur $[-1, 1]$ et en déduire que

$$\lim_{h\to 0^+} hU(1-h) = u.$$

3) On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est égale à la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie dans la partie I et que $\lim_{n\to+\infty} v_n > 0$.

   a) Exprimer pour tout $x \in \left]-\rho, \rho\right[$, $(3 - x - x^2 - x^3)U(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré deux dont on calculera les coefficients (en fonction de a, b et c).

   b) En déduire l'expression explicite de $U(x)$ et vérifier que

$$\lim_{h\to 0^+} hU(1-h) = \frac{a + 2b + 3c}{6}.$$

Partie III

On fixe dans cette partie un entier $k\geq 3$ et k nombres réels a_0, a_1, ..., a_{k-1}. On définit alors par récurrence la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante : pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $x_j = a_j$ et pour tout $n\geq 0$, x_{n+k} est la moyenne des k nombres x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k-1} c'est-à-dire

$$x_{n+k} = \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k-1}}{k}.$$

On définit pour tout $n\geq 0$, M_n (respectivement m_n) comme étant le plus grand (respectivement le plus petit) élément de l'ensemble $\{x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}\}$. Autrement dit :

$$M_n = \max(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1})$$

$$m_n = \min(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}).$$

1) Montrer que, pour tout $n\geq 0$, $M_n\geq x_{n+k}\geq m_n$. En déduire que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante et que $(m_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante.

2) En déduire que les deux suites $(M_n)_{n\geq 0}$ et $(m_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes. On pose alors $L = \lim_{n\to+\infty} M_n$ et $l = \lim_{n\to+\infty} m_n$.

3) Montrer que pour tout $n\geq 0$,

$$x_{n+k}\geq\frac{M_n + (k-1)m_n}{k}.$$

4) On montre dans cette question par l'absurde que $L = l$. On suppose donc (uniquement dans cette question) que le nombre $\epsilon = L - l$ est strictement positif.
   a) Montrer qu'il existe $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$,
$$m_n \geq l - \epsilon/k.$$
   b) Montrer qu'alors pour tout $n \geq n_0$,
$$x_{n+k} \geq l + \epsilon/k^2.$$
   En déduire alors que pour tout $j \geq n_0 + k$, $m_j \geq l + \epsilon/k^2$. Conclure.

5) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

6) On définit maintenant pour tout $n \geq 0$,
$$y_n = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)x_{n+j} = x_n + 2x_{n+1} + 3x_{n+2} + \ldots + kx_{n+k-1}.$$
   a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $y_{n+1} = y_n$.
   b) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \ldots + ka_{k-1}}{1+2+3+\ldots+k}.$$

Partie IV

On se propose maintenant de résoudre le problème suivant : on se donne une fonction g continue sur l'intervalle $[0,1]$ telle que
$$g(1) = \int_0^1 g(x)dx$$
et on cherche une fonction f continue sur $[0,+\infty[$ telle que les deux conditions suivantes soient réalisées :
- Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = g(x)$
- Pour tout $x \geq 1$,
$$f(x) = \int_{x-1}^{x} f(y)dy.$$

1) Montrer que si f vérifie les conditions ci-dessus alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.

2) On définit par récurrence une suite de fonctions g_n de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0,1]$ de la manière suivante :
   i) $g_0(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
   ii) Pour tout $n \geq 1$, $g_n(0) = g_{n-1}(1)$ et g_n vérifie pour tout $x \in [0,1]$,
$$g_n'(x) - g_n(x) = -g_{n-1}(x).$$
   a) Expliciter g_n à l'aide de g_{n-1}.
   b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
$$g_n(1) - g_n(0) = \int_0^1 (g_n(y) - g_{n-1}(y))dy$$
   et en déduire que pour tout $n \geq 0$, $g_n(1) = \displaystyle\int_0^1 g_n(y)dy$.
   c) Vérifier que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0,1]$,
$$g_n(x) = \int_0^x g_n(y)dy + \int_x^1 g_{n-1}(y)dy$$
   (Indication : on pourra d'abord comparer les dérivées de ces deux expressions).

d) On définit maintenant la fonction F sur $[0,+\infty[$ de la manière suivante : pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout $x \in [n, n+1[$,

$$F(x) = g_n(x-n).$$

Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout $x \geq 1$,

$$F(x) = \int_{x-1}^{x} F(y)dy.$$

3) On suppose maintenant que f est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ telle que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(y)dy$. On pose alors pour tout $x \geq 0$,

$$h(x) = \int_{x}^{x+1} (u-x)f(u)du.$$

a) Montrer que h est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que h est une fonction constante sur $[0,+\infty[$.