Banque << Agro – Véto >>
A – 0209

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE A

Durée : 3 heures 30 minutes

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Les problèmes I et II sont indépendants.

Problème I

$(E,+,\cdot)$ désigne un espace vectoriel réel de dimension 3, $\mathsf{B}=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$ désigne une base de *E*.

Considérons l'endomorphisme *u* de *E* défini par : $\operatorname{Mat}(u,\mathsf{B})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\4&-4&-2\end{pmatrix}$, matrice que nous noterons *A* dans tout le problème.

1. Diagonalisation de u

1.1. Déterminer les valeurs propres de u .
Ce résultat suffit-il à assurer la diagonalisabilité de u ? *Votre réponse sera justifiée.*

1.2. Pour chaque valeur propre de u , déterminer une base du sous-espace propre associé.

1.3. En déduire que u est diagonalisable.

1.4. Déterminer une base $\mathsf{B}'=\left(\overrightarrow{e'_1},\overrightarrow{e'_2},\overrightarrow{e'_3}\right)$ de *E* telle que la matrice de *u* dans cette nouvelle base B' soit $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. Recherche des « racines carrées » de u

2.1. On suppose qu'il existe un endomorphisme *v* de *E* tel que : $v\circ v=u$.

2.1.1. Montrer que : $u\circ v=v\circ u$.

2.1.2. Montrer que : $u\left(v\left(\overrightarrow{e'_1}\right)\right)=-2v\left(\overrightarrow{e'_1}\right)$.

En déduire que $v\left(\overrightarrow{e'_1}\right)$ et $\overrightarrow{e'_1}$ sont colinéaires, puis que $\overrightarrow{e'_1}$ est un vecteur propre de *v*.

2.1.3. $\vec{x}$ désigne un vecteur propre de *u* associé à la valeur propre 1.

Montrer que : $u\left(v\left(\vec{x}\right)\right)=v\left(\vec{x}\right)$,

puis en déduire que $v\left(\vec{x}\right)$ appartient à $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e'_2},\overrightarrow{e'_3}\right)$.

2.1.4. En déduire qu'il existe des réels $a,\ x,\ y,\ z,\ t$ tels que : $\operatorname{Mat}\left(v,\mathcal{B}'\right)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}$.

2.1.5. Montrer que : $\left(\operatorname{Mat}\left(v,\mathcal{B}'\right)\right)^2=\operatorname{Mat}\left(u,\mathcal{B}'\right)$, et en déduire que : $a^2=-2$.

2.2. Existe-t-il des endomorphismes v de E tels que $v\circ v=u$? *Votre réponse sera justifiée.*

3. Construction d'une base de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale nulle.

Nous constatons que la somme des éléments diagonaux de A est nulle, et nous nous proposons de montrer que A est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

3.1. Mettons en place notre premier changement de base.

3.1.1. Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{e_1},u\left(\overrightarrow{e_1}\right)\right)$ est libre.

3.1.2. Montrer qu'un vecteur $\vec{x}$ de composantes (a,b,c) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1},u\left(\overrightarrow{e_1}\right)\right)$ si, et seulement si : $4b-c=0$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\left(\overrightarrow{e_1},u\left(\overrightarrow{e_1}\right),\vec{x}\right)$ soit une base de E.

Dans la suite du problème, $\overrightarrow{e''_3}$ est le vecteur de composantes $(1,1,1)$ dans la base $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}''$ est la famille $\left(\overrightarrow{e_1},u\left(\overrightarrow{e_1}\right),\overrightarrow{e''_3}\right)$.

3.1.3. Justifier que $\mathcal{B}''$ est une base de E.

3.1.4. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et calculer P^{-1}.

Calculer alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}''$.

La matrice obtenue est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 0 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \lambda,\ \mu$ *réels, et sera notée dans la suite du problème* A''.

3.2. Considérons la base canonique de $\mathbb{R}^2$ notée $\mathcal{C}=\left((1,0),(0,1)\right)$,

et considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\operatorname{Mat}\left(f,\mathcal{C}\right)=\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$, les valeurs de $\gamma,\ \delta,\ \lambda,\ \mu$ sont celles calculées à la question précédente.

3.2.1. Montrer que la famille $\mathcal{C}'=\left((0,1),f\left((0,1)\right)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$,

et écrire la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

3.2.2. Calculer alors la matrice de f dans cette nouvelle base $\mathcal{C}'$.

3.3. En notant la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ de la façon suivante : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,\ b,\ c,\ d$ réels calculés précédemment, définissons la matrice R par : $R=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a&b\\0&c&d\end{pmatrix}$.

3.3.1. Montrer que R est inversible et calculer R^{-1} .

3.3.2. Calculer $R^{-1}A''R$.

3.4. En déduire que A est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.

Problème II : Développement asymptotique d'une somme de Riemann

f étant une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs réelles, nous noterons pour tout entier naturel non nul n : $S_n(f)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))$? *Aucune démonstration n'est attendue.*

1. Application

Considérons la suite u définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+n}$,

et la suite v définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$.

1.1. Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel non nul n donné, calcule la valeur de u_n.

1.2. Montrer que la suite u est convergente et préciser sa limite.

1.3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $v_n+\dfrac{1}{2}u_n=u_{2n}$.

1.4. Montrer alors que la suite v converge vers $\dfrac{1}{2}\ln(2)$.

2. Développement asymptotique d'une somme de Riemann

Dans cette partie, f désigne une fonction de classe C^∞ sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles .

2.1. Justifier l'existence d'un réel positif M tel que : $\forall x\in[0,1]$, $\left|f^{(3)}(x)\right|\le M$.

2.2. Soit n un entier naturel non nul, k un entier naturel compris au sens large entre 0 et $n-1$, t un réel appartenant à $\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right]$.

2.2.1. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f de classe C^3 sur l'intervalle $\left[\dfrac{k}{n},t\right]$, montrer que :

$$\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\le\frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3.$$

2.2.2. q étant un entier naturel non nul, quelle est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t\mapsto\left(t-\dfrac{k}{n}\right)^q$ qui s'annule en $\dfrac{k}{n}$?

2.2.3. Par intégration entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$, montrer que :

$$\left|\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t\right)-\frac{1}{n}\,f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}\,f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{6n^3}\,f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{24n^4}.$$

2.3. n désigne un entier naturel non nul.

En sommant les inégalités obtenues en ***2.2.3.*** , montrer que :

$$\left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-S_n(f)-\frac{1}{2n}S_n(f')-\frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right|\leq\frac{M}{24n^3}.$$

2.4. Définissons la suite (ε_n) par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \varepsilon_n=n^2\left(S_n(f)+\frac{1}{2n}S_n(f')+\frac{1}{6n^2}\,S_n(f'')-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Montrer que la suite (ε_n) converge vers 0 et que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ S_n(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\,S_n(f')-\frac{1}{6n^2}\,S_n(f'')+\frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

2.5. Justifier l'existence de deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ S_n(f')=\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\,S_n(f'')+\frac{\varepsilon'_n}{n},$$

et : $$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ S_n(f'')=\int_0^1 f''(t)\mathrm{d}t+\varepsilon''_n.$$

2.6. En déduire l'existence d'une suite (δ_n) de limite nulle telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ S_n(f)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\mathrm{d}t+\frac{\delta_n}{n^2}.$$

Nous venons de prouver le résultat suivant :

$$S_n(f)\underset{n\to+\infty}{=}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. Application

Les suites u et v ont été définies à la question ***1.*** .

3.1. Montrer qu'il existe une suite (α_n) de limite nulle telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ u_n=\ln(2)+\frac{1}{4n}+\frac{1}{16n^2}+\frac{\alpha_n}{n^2}.$$

3.2. En déduire un équivalent simple de $u_n-\ln(2)$ au voisinage de $+\infty$.

3.3. Montrer que : $v_n-\dfrac{\ln(2)}{2}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{64n^2}$.

3.4. Comparer la rapidité de convergence des suites u et v .

FIN DE L'ÉPREUVE