Annales concours ecricome 2006

Mathématiques - OPTION SCIENTIFIQUE

ESPRIT GÉNÉRAL

Objectifs de l'épreuve

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

- Deux exercices d'application des connaissances de base ;
- Un problème faisant largement appel aux probabilités

Instruments de calcul interdits, tables de lois fournies

Evaluation

- Deux exercices de valeur sensiblement égale ;
- 12 à 14 points pour le problème.

ÉPREUVE 2006

Durée : 4 heures

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

1. Exercice

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a donc :

$$\langle x\,,\,y\rangle = {}^tXY$$

où X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$.
Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note f^* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

1.1. Quelques propriétés de f^*.

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x)\,,\, y\rangle = \langle x\,,\, f^*(y)\rangle.$$

2. Montrer que f^* est le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x)\,,\, y\rangle = \langle x\,,\, g(y)\rangle.$$

3. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).

   a. Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$ calculer $\langle x\,,\, f^*(y)\rangle$.

   b. En déduire que $F^\perp$ est stable par f^*.

1.2. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme
$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$
où $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, f_u^* appartient à $\mathcal{E}$.

3. On note $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$ et $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur e_1.

   a. Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.

   b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par f_u.

   c. Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u .

   d. Déterminer une équation de $\mathcal{D}^\perp$.

   e. Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

   f. Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme
$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & l \end{pmatrix}$$
   où e, f, g, h, l sont des réels.

2. Exercice

On considère la fonction f des deux variables réelles x, t , définie par :

$$f(x,t) = e^{-t^2}\sqrt{1+xt}.$$

1. Etude de f.

   a. Justifier que f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

   b. Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, calculer

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t).$$

   c. Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

   $$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}e^{-t^2}.$$

2. Montrer que pour tout réel α strictement positif, l'intégrale

   $$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,dt$$

   est convergente.
   En déduire que pour tout réel x positif, les intégrales suivantes sont convergentes :

   $$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,dt.$$

3. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

   $$g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt.$$

   a. Sans chercher à calculer la dérivée de g, montrer que g est croissante sur $[0,+\infty[$.

   b. Soit $x_0 \in [0,+\infty[$.
   Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

   $$\left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.$$

   c. En déduire que pour $x_0 \in [0,+\infty[$,

   $$\left|g(x) - g(x_0) - (x-x_0)\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt.$$

   d. Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que g' est définie par

   $$g'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

   Retrouver le sens de variations de g.

3. Problème

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.
On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^{ème}$ l'autre côté.
De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.
On définit de même les séries suivantes.
Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.
Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le $i^{ème}$ lancer amène Pile" et F_i l'événement contraire.
Les trois parties sont indépendantes.

3.1. Etude des longueurs de séries.

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+1$.
   En déduire que
   $$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$
   Vérifier que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.$$
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.
   a. Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+k+1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.
   b. En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$
   On admet que
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1.$$
   c. Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

3.2. Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \frac{1}{2}$.
On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :
-La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)^{ème}$ l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;
-La dernière série se termine nécessairement au $n^{ème}$ lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP...(F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1 \ ; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2 \ ;$$

$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3 \ ; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4 \ ;$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

3. *Simulation informatique :*
   Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le $k^{ème}$ lancer amène Pile et 0 sinon.
   On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random(2)` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0,1\}$ (soit une loi de Bernoulli de paramètre 1/2). Compléter le programme informatique suivant pour que, `m` étant une valeur entière, inférieure à 100, entrée par l'utilisateur, il simule les m variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ (dont les valeurs seront placées dans le tableau `X`) et détermine les valeurs de $N_1, N_2, \ldots, N_m$ (qui seront stockées dans le tableau `N`).

```
program simulation;
const nmax=100;
type suite=array[1..nmax]of integer;
var X, N: suite;
  m: integer;
begin
readln(m);
randomize;
X[1]: =....; N[1]: =....;
for i: =2 to m do begin
     X[i]: =...
     .....
     .....
     end;
end.
```

4. **Fonction génératrice de N_n.**
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k.$$

   a. Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.
   b. Que représente $G_n'(1)$?

c. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$P\left((N_n = k) \cap P_n\right) = \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\right).$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P\left((N_n = k) \cap F_n\right) = \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}\right) + \frac{1}{2} P\left((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}\right).$$

Montrer alors que

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1).$$

d. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).$$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$$

e. Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

3.3. Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. Montrer que pour tout réel x on a

$$1 - x \leqslant e^{-x}.$$

2. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geqslant k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k \leqslant i \leqslant n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n.$$

a. Justifier que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.$$

b. Montrer que

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$$

puis, en utilisant 3.3.1, que

$$P(C_n) \geqslant 1 - exp(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)).$$

En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1.$$

Mathématiques - OPTION SCIENTIFIQUE

c. Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i) \ ?$$

d. Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i) = 1.$$

3. En considérant les événements A_n "on obtient Pile au $(2n)^{ème}$ et au $(2n+1)^{ème}$ lancers", montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.

CORRIGÉ

Exercice

Quelques propriétés de f^*.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^3$ et M la matrice dans la base canonique de f,
$$\langle f(x), y\rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX({}^tMY) = \langle x, f^*(y)\rangle.$$
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle \ = \langle x, f^*(y)\rangle$$
On a :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \langle x, g(y) - f^*(y)\rangle \ = 0.$$
En prenant, pour y donné, $x = g(y) - f^*(y)$ on obtient
$$\forall y \in \mathbb{R}^3, \|g(y) - f^*(y)\|^2 = 0 \text{ soit } g(y) = f^*(y)$$
d'où $g = f^*$.
f^* est donc le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant cette propriété.
   a. Soit $x \in F$ et $y \in F^\perp$, $\langle x, f^*(y)\rangle \ = \langle f(x), y\rangle = 0$ car $f(x) \in F$. (F stable par f)
   b. Soit $y \in F^\perp$, on a $\forall x \in F$ $\langle x, f^*(y)\rangle \ = 0$ donc $f^*(y) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par f^*.

Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$

1. L'endomorphisme nul, de matrice nulle, appartient à $\mathcal{E}$.
Soit λ, μ deux réels, f_u et f_v deux éléments de $\mathcal{E}$.
$$Mat(\lambda f_u + \mu f_v, \mathcal{B}) = \lambda M_u + \mu M_v = M_{\lambda u + \mu v}$$
donc $\lambda f_u + \mu f_v \in \mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. Pour $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$Mat(f_u^*,\mathcal{B}) = {}^t M_u = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = M_{(a,c,b)}$$

Donc $f_u^* = f_v$ avec $v = (a,c,b)$, soit f_u^* appartient à $\mathcal{E}$.

3. a. e_1 est non nul et pour $u = (a,b,c), f_u(e_1) = (a+b+c)e_1$ donc e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.

b. Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathcal{D}$, il existe α réel tel que $x = \alpha e_1$. On a :

$$f_u(x) = \alpha f_u(e_1) = \alpha(a+b+c)e_1 \in \mathcal{D}$$

donc $\mathcal{D}$ est stable par f_u.

c. Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, d'après b. $\mathcal{D}$ est stable par $f_{(a,c,b)}$, d'après 1.1.3.b $\mathcal{D}^\perp$ est stable par $f^*_{(a,c,b)} = f_u$.

d. $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{D}^\perp \Leftrightarrow \langle x, e_1\rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$
Une équation de $\mathcal{D}^\perp$ est donc

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

e. On a $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = 0$ donc e_2 et e_3 sont des vecteurs de $\mathcal{D}^\perp$. On vérifie que $\|e_2\| = 1, \|e_3\| = 1, \langle e_2, e_3\rangle = 0$ donc (e_2, e_3) est une famille orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ qui est de dimension 2, donc c'est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$.
$\|e_1\| = 1$ donc (e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$, la juxtaposition d'une b.o.n de $\mathcal{D}$ et d'une b.o.n de $\mathcal{D}^\perp$ donne une b.o.n de $\in \mathbb{R}^3$ car :

$$\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp = \mathbb{R}^3.$$

f. $\mathcal{D}$ est stable par f_u donc il existe $e \in \mathbb{R}$ tel que $f_u(e_1) = ee_1$.
$\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u donc il existe f,g,h,l réels, tels que $f_u(e_2) = fe_2 + he_3$ et $f_u(e_3) = ge_2 + le_3$, d'où la forme de la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice

1. a. $(x,t) \mapsto 1 + xt$ et $(x,t) \mapsto -t^2$ sont de classe C^2 sur $\in \mathbb{R}^2$ en tant que fonctions polynomiales, la première étant à valeur dans $[1,+\infty[$ lorsque (x,t) varie dans $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.
$u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $u \mapsto e^{-u}$ est de classe C^2 sur $\in \mathbb{R}$ donc par composition, puis par produit f est de classe C^2 sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

b. Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{2\sqrt{1+xt}}e^{-t^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{-t^2}{4(1+xt)^{3/2}}e^{-t^2}.$$

c.

$$1 + xt \geqslant 1 \Rightarrow (1+xt)^{3/2} \geqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{(1+xt)^{3/2}} \leqslant 1$$

d'où

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{t^2}{4}\frac{1}{(1+xt)^{3/2}}e^{-t^2} \leqslant \frac{t^2}{4}e^{-t^2}.$$

2. La fonction $t \mapsto t^\alpha e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ car $\alpha > 0$ et positive.

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 t^\alpha e^{-t^2} = 0$$

d'où

$$t^\alpha e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^2}).$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\, dt$ est convergente et donc $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\, dt$ est convergente.

Pour tout $x > 0$, $t \mapsto e^{-t^2}\sqrt{1+xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

En $+\infty$, $e^{-t^2}\sqrt{1+xt} \sim \sqrt{x}\, t^{1/2} e^{-t^2} \geqslant 0$, or $\int_0^{+\infty} t^{1/2}e^{-t^2}\, dt$ est convergente ($\alpha = 1/2$) donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\, dt$ est convergente.

Pour $x = 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente (même démonstration que pour $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\, dt$)

$t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+xt}} e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

$\frac{t}{\sqrt{1+xt}} e^{-t^2} \leqslant te^{-t^2}$, et $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\, dt$ est convergente (cas $\alpha = 1$) donc à nouveau, $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+xt}} e^{-t^2}\, dt$ est convergente.

3.

a. Soit $(x,y) \in [0,+\infty[^2$.

$$\begin{aligned} x \leqslant y &\Rightarrow \forall t > 0,\ 1 + xt \leqslant 1 + yt \\ &\Rightarrow \forall t > 0,\ e^{-t^2}\sqrt{1+xt} \leqslant e^{-t^2}\sqrt{1+yt} \\ &\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+yt}\, dt \\ &\Rightarrow g(x) \leqslant g(y) \end{aligned}$$

donc g est croissante sur $[0,+\infty[$.

b. Soit $t > 0$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'application partielle qui est de classe C^2 sur $[0,+\infty[$ à $F_t : x \mapsto f(x,t)$:

$$|F_t(x) - F_t(x_0) - (x - x_0)F_t'(x_0)| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{2} \sup_{y\in[x_0,x] \text{ ou } [x,x_0]} |F_t''(y)|$$

or

$$F_t'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) et |F_t''(y)| = |\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y,t)| \leq \frac{t^2}{4}e^{-t^2}$$

soit

$$\left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.$$

c. La convergence de $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt$ a été prouvée en 2. donc, par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty}(f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t))\, dt$ est absolument convergente. De plus $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\, dt$ étant convergente (également d'après 2.), on a :

$$\left|g(x) - g(x_0) - (x - x_0)\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| = \left|\int_0^{+\infty}\left(f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)dt\right|$$
$$\leqslant \int_0^{+\infty}\left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right|dt$$
$$\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x - x_0|^2\,dt = \frac{|x - x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt.$$

d. En divisant par $|x - x_0|$ (pour $x \neq x_0$) on obtient :

$$0 \leqslant \left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt\right| \leqslant \frac{|x - x_0|}{8}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|x - x_0|}{8}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt = 0$$

d'où

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$$

cela signifie que g est dérivable en $x_0 \in [0,+\infty[$ et que $g'(x_0) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt$, d'où la dérivabilité de g sur $[0,+\infty[$.

On a, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \geqslant 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \geqslant 0$ d'où en intégrant $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$: g est croissante.

Problème

Etude des longueurs de séries

1. $(L_1 = 1) = (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)$, plus généralement

$$(L_1 = n) = (P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \cap P_{n+1}).$$

Les deux événements dont la réunion forme $(L_1 = n)$ sont incompatibles et les lancers sont indépendants donc $P(L_1 = n) = p^nq + q^np$.

Les séries de terme général p^nq et q^np sont des séries géométriques convergentes car $0 < p < 1$ et donc $0 < q < 1$ et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = qp\sum_{n=1}^{+\infty} p^{n-1} + pq\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = qp\frac{1}{1-p} + pq\frac{1}{1-q} = p + q = 1.$$

2. .

a. L'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ est la réunion des deux événements $[P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \ldots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}]$ et $[F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \ldots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}]$.

Par incompatibilité et indépendance,

$$P((L_1 = n) \cap (L_2 = k)) = p^nq^kp + q^np^kq = p^{n+1}q^k + q^{n+1}p^k$$

b. $((L_1 = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements donc pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((L_1 = n) \cap (L_2 = k))$$

$$P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty}(p^{n+1}q^k + q^{n+1}p^k)$$

Or les séries de termes généraux p^n et q^n sont convergentes car $0 < p < 1$ donc on a :

$$P(L_2 = k) = pq^k \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + qp^k \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$$

$$P(L_2 = k) = pq^k p \frac{1}{1-p} + qp^k q \frac{1}{1-q}$$

d'où

$$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$

c. $kP(L_2 = k) = p^2 kq^{k-1} + q^2 kp^{k-1} > 0$ or les séries de terme général kq^{k-1} et kp^{k-1} convergent car $0 < q < 1$ et $0 < p < 1$ donc L_2 admet une espérance et :

$$E(L_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 kq^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} q^2 kp^{k-1} = p^2 \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \frac{1}{(1-p)^2} = 1 + 1 = 2.$$

Etude du nombre de séries lors des *n* premiers lancers.

1. *$N_1 = 1$ (variable aléatoire certaine) et $E(N_1) = 1$
   *$N_2(\Omega) = \{1,2\}$

$$P(N_2 = 1) = P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) = (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{2}$$

$$P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = \frac{1}{2}$$

et

$$E(N_2) = 1P(N_2 = 1) + 2P(N_2 = 2) = \frac{3}{2}.$$

*$N_3(\Omega) = \{1,2,3\}$ et

$$P(N_3 = 1) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 2(\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{4}$$

$$P(N_3 = 2) = P(P_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) = 4(\tfrac{1}{2})^3$$

$$P(N_3 = 2) = \frac{1}{2}$$

$$P(N_3 = 3) = P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) = \frac{1}{4}$$

$$E(N_3) = 2.$$

2. $N_n(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ puisqu'on peut avoir une seule série si les n lancers sont identiques et au maximum n séries si chaque lancer amène un côté différent du précédent. On obtient donc :

$$P(N_n = 1) = P(P_1 \cap \ldots \cap P_n) + P(F_1 \cap \ldots \cap F_n) = 2(\tfrac{1}{2})^n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P(N_n = n) = P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \ldots) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \ldots)$$

$$P(N_n = n) = 2(\tfrac{1}{2})^n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

(le dernier de chacun des deux événements étant P_n ou F_n suivant la parité de n).

3.
```
program simulation;
const nmax=100;
type suite=array[1..nmax] of integer;
var X,N:suite;
m,i :integer;
begin
readln(m);
randomize;
X[1]:=random(2);write(X[1]);N[1]:=1;
for i:=2 to m do begin
X[i]:=random(2);write(X[i]);
if X[i]<>X[i-1] then N[i]:=N[i-1]+1
else N[i]:=N[i-1]
end;
end.
```

4. Fonction génératrice de N_n.

a. D'après le théorème de transfert, qui s'applique ici sans problème puisque les v.a. ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, on a

$$E(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k = G_n(s).$$

b.

$$G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k)s^{k-1} d'o G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k) = E(N_n)$$

c.

$$(N_n = k) \cap P_n = [(N_n = k) \cap P_{n-1} \cap P_n] \cup [(N_n = k) \cap F_{n-1} \cap P_n]$$
$$(N_n = k) \cap P_n = [(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n] \cup [(N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n]$$

d'où

$$\begin{aligned} &P[(N_n = k) \cap P_n] = \\ &= P[(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n] + P[(N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n] \\ &= \tfrac{1}{2}P[(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}] + \tfrac{1}{2}P[(N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}] \end{aligned}$$

car, par indépendance des lancers, P_n est indépendant de $(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}$ et de $(N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}$ et est de probabilité 1/2.

$$\begin{aligned} &P(N_n = k) = P[(N_n = k) \cap P_n] + P[(N_n = k) \cap F_n] \\ &= \tfrac{1}{2}P[(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}] + \tfrac{1}{2}P[(N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}] + \tfrac{1}{2}P[(N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}] \\ &+ \tfrac{1}{2}P[(N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}] \\ &= \tfrac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \tfrac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1). \end{aligned}$$

d.

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k-1)s^k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k)s^k + \frac{1}{2}s\sum_{k=2}^{n} P(N_{n-1} = k-1)s^{k-1}$$

car $P(N_{n-1} = n) = P(N_{n-1} = 0) = 0$

$$G_n(s) = \frac{1}{2}G_{n-1}(s) + \frac{1}{2}sG_{n-1}(s)$$

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$$

D'où $G_n(s) = \left[\frac{1+s}{2}\right]^{n-1} G_1(s)$ (suite géométrique) et $G_1(s) = P(N_1 = 1)s = s$ et donc

$$G_n(s) = \left[\frac{1+s}{2}\right]^{n-1} s.$$

e. Le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers est $E(N_n)$.

$$G_n'(s) = (n-1)\frac{1}{2}\left[\frac{1+s}{2}\right]^{n-2} s + \left[\frac{1+s}{2}\right]^{n-1}$$

soit

$$G_n'(1) = \frac{n+1}{2} = E(N_n).$$

Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est convexe donc la courbe représentative est au dessus de toutes ses tangentes, or la tangente en 0 a pour équation $y = 1 - x$, d'où, pour tout réel x, $1 - x \leqslant e^{-x}$. (L'étude de la fonction $x \mapsto e^{-x} + x - 1$ donne également le résultat.)
2. a. La série de terme général $P(A_i)$ est une série à termes positifs, divergente, donc la suite des sommes partielles $(\sum_{i=1}^{n} P(A_i))$ tend vers $+\infty$. Or

$$\sum_{i=k}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.$$

b.

$$P(C_n) = P(A_k \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_k \cup \ldots \cup A_n})$$

$$P(C_n) = 1 - P(\overline{A_k} \cap \ldots \cap \overline{A_n}) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$$

par indépendance des A_i et donc des $\overline{A_i}$.
On a donc :

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n}(1 - P(A_i)) \text{ et } 0 \leqslant 1 - P(A_i) \leqslant \exp(-\mathrm{P}(\mathrm{A}_i))$$

donc par produit

$$0 \leqslant \prod_{i=k}^{n}(1-P(A_i)) \leqslant \prod_{i=k}^{n}\exp(-P(A_i)).$$

Finalement

$$P(C_n) \geqslant 1-\prod_{i=k}^{n}\exp(-P(A_i)) = 1-\exp(-\sum_{i=k}^{n}P(A_i)).$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=k}^{n}P(A_i) = +\infty \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty}\exp(-\sum_{i=k}^{n}P(A_i)) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 1-\exp(-\sum_{i=k}^{n}P(A_i)) = 1.$$

En passant à la limite dans l'encadrement

$$1 \geqslant P(C_n) \geqslant 1-\exp(-\sum_{i=k}^{n}P(A_i))$$

on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}P(C_n) = 1.$$

c. $C_{n+1} = A_k \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1} = C_n \cup A_{n+1}$ d'où $C_n \subset C_{n+1}$.
$(C_i)_{i\geqslant k}$ est une suite croissante d'événements donc par propriété de limite monotone, on obtient :

$$P\left[\bigcup_{i=k}^{+\infty}C_i\right] = \lim_{n\to+\infty}P(C_n) = 1$$

d. Pour tout $i \geqslant k, A_i \subset C_i$ d'où

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty}A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty}C_n$$

d'autre part, pour $n \geqslant k$,

$$C_n = A_k \cup \cdots \cup A_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty}A_i$$

d'où

$$\bigcup_{n=k}^{+\infty}C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty}A_i$$

et finalement on a bien l'égalité. En utilisant la question précédente, on a

$$P\left[\bigcup_{i=k}^{+\infty}A_i\right] = P\left[\bigcup_{n=k}^{+\infty}C_n\right] = 1.$$

3. $A_n = P_{2n} \cap P_{2n+1}$ d'où $P(A_n) = p^2$. La série de terme général p^2 diverge donc le résultat précédent s'applique. L'événement "avoir deux Pile consécutifs après le lancer k" est l'événement $\bigcup_{i=k}^{+\infty}A_i$ qui est de probabilité 1 et donc la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer k vaut 1.

RAPPORT

L'épreuve de cette option était volontairement plus courte. Elle était conforme au programme de la classe et à son esprit et en couvrait une large partie. Les résultats d'un certain nombre de questions étaient fournis dans l'énoncé ; des candidats croient démontrer quelque chose en faisant une suite de calculs ou de raisonnements ne menant nulle part mais qui tout à coup donnent le bon résultat. Rappelons que cette attitude n'est pas appréciée des correcteurs.
Traditionnellement au moins une question porte sur la rédaction d'un programme en langage Pascal. Les candidats semblent l'oublier. Pourtant les points qui lui sont affectés ne sont jamais négligeables.

La présentation des copies est acceptable sans plus. La rédaction est en moyenne très médiocre. Peu d'efforts sont faits pour construire les solutions ou expliquer la démarche proposée. Les résultats reflètent la très grande hétérogénéité du niveau des candidats et de leur investissement dans la matière. On n'exerce pas assez de contrôle sur ce que l'on écrit. Une fois de plus on ne peut que constater que l'écart se creuse entre les meilleurs et les moins bons. Cela devient inquiétant.
La lecture des résultats prouve que le sujet a permis de classer les candidats.

La moyenne est de **10.81** avec un écart-type de **5.41**

Bilan de la correction des copies

Exercice 1

1.1 Quelques propriétés.
On peut constater qu'un nombre non négligeable d'élèves n'aborde pas cette partie.
1.1.1
Certains élèves ne semblent rien savoir sur les espaces vectoriels euclidiens.
Quelques $<f(x), y>= {}^tM.Y$.
1.1.2
Peu traitent correctement la question. On pose souvent bien le problème en terme matriciel mais on ne montre pas ce que l'on affirme à savoir que :

$$\forall X, Y \in M_{3,1}(R) \qquad {}^tXAY = {}^tXBY \Rightarrow A = B$$

On peut lire :

$$<a, b>=<a, c> \text{ donne } <a - a, b - c>= 0.$$

1.1.3
a) est bien traité, pas le b). On ne fait ici aucun effort pour construire une (bonne) solution.
On part de a) on écrit que x est dans F et que : $<x, f^*(y)>= 0 \Rightarrow f^*(y) \in F^\perp$

1.2 Réduction des matrices d'un ensemble E.
1.2.1. On note dans cette question des confusions aussi incroyables qu'inquiétantes.
E est souvent un ensemble de matrices. On confond la stabilité par combinaisons linaires avec la linéarité.
On montre que :

$$M_B(\_ f_u + f_v) = \_M_B(f_u) + M_B(f_v).$$

1.2.2. Question comprise mais assez mal exprimée. On lit souvent : ${}^{t}Mu$ est de la forme de Mu.
1.2. 3.a) On oublie de préciser que e_1 est non nul. Beaucoup sont incapables de calculer $f_u(e_1)$. Dans cette question tout y passe. On peut lire :

$$f_u(D) \subset e_1 \text{ , } D=\lambda e_1 \text{ ou } D=e_1$$

et encore :

$$f_u(\lambda e_1) \text{ est une droite de vecteur directeur } e_1 \text{ ; } f_u(e_1) = ME_1.$$

b) On lit assez souvent : soit y = e_1 x + b ou y = x e_1 + b l'équation de D, ou D = e_1 t + b avec b et t réels.
c) La stabilité de l'orthogonal de D est entrevue mais pas souvent rédigée convenablement Très rares sont les candidats ayant pensé à utiliser $(f^*)^* = f$. Le standard est : D est stable par f_u donc $D^\perp$ est stable par f^*_u. Comme f^*_u appartient à E alors $D^\perp$ est stable par f_u.
d) Question de cours qui aurait dû être traitée par un grand nombre. Cela n'a pas été le cas.
e) On ne montre pas que e_2 et e_3 sont dans $D^\perp$. On montre que (e_2, e_3) est libre et on en déduit que c'est une base de $D^\perp$ sans avoir la dimension de $D^\perp$.
f) Ce n'est pas le plus mal fait, au moins par les gens qui ne cherchent pas à déterminer explicitement les coefficients.

Exercice 2

2.1.

a) Une question très simple qui montre que des notions fondamentales ne sont pas assimilées comme la composition des fonctions par exemple. Les justifications ne sont pas sérieuses. Et rares sont les copies qui mentionnent le fait que $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. On dit que $(x, t) \mapsto \sqrt{1+xt}$ est de classe C^2 sur $[0,+\infty[\times [0,+\infty[$ comme composée de deux fonctions de classe C^2 sur $[0,+\infty[\times [0,+\infty[$.
On amalgame de manière dramatique les fonctions d'une variable et de deux variables.
c) Ce n'est pas toujours bien fait et on majore souvent à l'intérieur de la valeur absolue.

2.2 On n'apporte pas beaucoup de soin à la rédaction dans l'étude des convergences. Pas de continuité, pas d'hypothèse de signe. De très nombreuses erreurs au niveau des équivalents. Au mieux : $\sqrt{1+xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{xt}$ sans condition sur x, et au pire $\sqrt{1+xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{t}$. On lit encore trop de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

2.3

a) On étudie g(x + 1) − g(x), 0n écrit des horreurs comme par exemple : g est croissante car c'est l'intégrale d'une fonction positive.
b) L'échec est général. On applique l'inégalité de Taylor Lagrange à f en x_0.
c) Davantage de réussite ici mais on oublie trop souvent l'étape "valeur absolue de l'intégrale plus petite que l'intégrale de la valeur absolue" et les problèmes de convergence ne sont pas traités.
d) Une fois sur deux on ne fait pas le rapport avec ce qui précède. On lit : g est dérivable car elle est définie par une intégrale ou comme primitive de f...

Problème

L'ensemble est relativement bien compris mais les solutions manquent de rigueur et de soin.

3.1 Etude des longueurs des séries.

Le défaut général est le manque de justification de la convergence des séries. A ce niveau on parle trop souvent de réserves sans jamais lever les réserves... On remplace parfois ∩ par X et U par +.

3.1.1 Manque parfois la mention de l'incompatibilité ou de l'indépendance.

3.1.2

b) Une question basique qui échappe à beaucoup. Lorsque l'on ne sait pas retrouver une loi marginale à partir de la loi conjointe on paraphrase le résultat.

c) On ne mentionne presque jamais l'absolue convergence.

3.2 Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

3.2.3

Bien que cela ne soit pas suffisant, il y a quelques progrès. Quelques agréables N[i] : =Abs(X[i]-X [i-1])

3.2.4 a) et b) Visiblement ce ne sont pas des évidences pour tout le monde.

c) On comprend bien la situation mais on a beaucoup de mal à la mettre en forme de manière juste et propre.

d) Pour la seconde égalité on parle trop souvent d'itération ou de récurrence au lieu de parler de suite géométrique.

3.3 Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Piles consécutifs.

3.3.1 On sait faire mais la rédaction n'est pas satisfaisante pour les gens qui utilisent la convexité

3.3.2 a) L'argument de signe est trop souvent ignoré. Pour beaucoup une suite divergente tend vers $\pm\infty$.

b) L'égalité est souvent montrée mais c'est l'échec pour l'inégalité dans la mesure où l'on applique **3.3.1** directement à $1-\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$ ce qui conduit à de graves erreurs pour obtenir le résultat. La limite est rarement bien justifiée car on passe à la limite sur l'inégalité au lieu de commencer par établir un encadrement.

c) Dans l'ensemble l'utilisation du théorème de la limite monotone n'est pas assez clairement évoquée.

d) La première égalité n'est pas bien justifiée.

3.3.2 Ce n'est jamais fait sérieusement.