ESPRIT GÉNÉRAL

Objectifs de l'épreuve

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

Evaluation

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE 2007

Durée : 4 heures

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

1. EXERCICE.

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

1.1. Etude des variations de la fonction f_a .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.

2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dresser le tableau de variation de f_a.

4. En déduire que :
$$\forall t > 0 \qquad f_a(t) \geqslant a$$

1.2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$..

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :
$$\forall t > a \qquad 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}$$

3. Montrer que pour tout entier n, non nul :
$$u_n \geqslant a$$

4. Prouver alors que pour tout entier n non nul :
$$0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a)$$
Puis que :
$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

1.3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :
$$g(x,y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(1+x)(1+y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature.

3. Vérifier que :
$$g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1(\frac{x}{y})$$

4. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

2. EXERCICE.

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
La matrice A suivante étant donnée

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

on définit l'application ϕ_A par :

$$\begin{aligned} \phi_A : M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \phi_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

2.1. Diagonalisation de A.

1. Vérifier que $A^2 = A$. En déduire les valeurs propres possibles de A.

2. Prouver que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :
$$A = PDP^{-1}$$
Donner l'écriture matricielle de P^{-1}.

2.2. Diagonalisation de ϕ_A.

1. Montrer que ϕ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Etablir que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A. En déduire les valeurs propres possibles de ϕ_A.

3. Montrer que la matrice M est un vecteur propre de ϕ_A associée à la valeur propre λ si et seulement si la matrice $N = P^{-1}MP$ est non nulle et vérifie l'équation matricielle :
$$DN - ND = \lambda N$$

4. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   a. Trouver l'ensemble des matrices N telles que $DN - ND = 0$.

   b. En déduire que la famille (A, M_1) avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ est une base du sous-espace propre $Ker\phi_A$ associé à la valeur propre 0.

   c. Déterminer les deux autres valeurs propres non nulles λ_1 et λ_2 de ϕ_A et caractériser les matrices N associées.

   d. En déduire une base de chaque sous-espace propre E_{λ_1} et E_{λ_1}associé aux valeurs propres λ_1 et λ_2.

5. L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ?

3. EXERCICE.

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

3.1. Mode de paiement de la clientèle.

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S = 0 \cap U = 0] = 0.4$$
$$P[S = 0 \cap U = 1] = 0.3$$
$$P[S = 1 \cap U = 0] = 0.2$$
$$P[S = 1 \cap U = 1] = 0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

a. Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = \dfrac{3}{5}$.

b. Calculer la covariance du couple (S, U). Les variables S et U sont-elles indépendantes ?

c. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.
Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geqslant 2$).
On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :
-C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
-L_1(resp.L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon.

a. Reconnaître la loi de C_n, rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.

b. Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P[L_1 = k] = 1$$

c. Déterminer la loi de L_2.

3.2. Etude du temps moyen de passage en caisse.

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.

2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera.
   Quel est le temps moyen de passage en caisse ?

3. a. Démontrer que la fonction de répartition de T, notée F_T est définie par :

$$\begin{array}{ll} \forall x < 0 & F_T(x) = 0 \\ \forall x \geqslant 0 & F_T(x) = 1 - (x+1)e^{-x} \end{array}$$

   b. Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités(de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\dfrac{2e-3}{2e}$.

4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.

   a. M désignant le temps d'attente du client C exprimer M en fonction de T_A et T_B.

   b. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire M est donnée par :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+ & P\left[M \leqslant t\right] = 1 - (1+t)^2 e^{-2t} \\ \forall t \in \mathbb{R}^{-*} & P\left[M \leqslant t\right] = 0 \end{cases}$$

   c. Prouver que M est une variable à densité et expliciter une densité de M.

CORRIGÉ

1. EXERCICE.

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

1.1. Etude des variations de la fonction f_a.

1. Déterminons la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} f_a(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t}) = +\infty$$

   Puis :

$$\lim_{t\to+\infty} f_a(t) - \frac{1}{2}t = \lim_{t\to+\infty} \frac{a^2}{t} = 0$$

   La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote au voisinage de $+\infty$ à la courbe représentative de f_a . D'autre part au voisinage de $+\infty$ $f_a(t) - \frac{1}{2}t = \frac{a^2}{t} > 0$ La courbe représentative de f_a est au dessus de cette asymptote.

2. Déterminons la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives.

$$\lim_{t\to0^-} f_a(t) = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t}) = +\infty \text{ car } \lim_{t\to0^+} \frac{a^2}{t} = +\infty$$

   La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la représentation graphique.

3. Calculons la dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{*+}$, cette fonction étant dérivable sur $\mathbb{R}^{*-}$comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas..

$$\forall t > 0 \qquad f_a'(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a^2}{t^2}) = \frac{1}{2}\frac{t^2 - a^2}{t^2} = \frac{1}{2}\frac{(t-a)(t+a)}{t^2}$$

$$\forall t > 0 \qquad f_a'(t) = \frac{(t-a)(t+a)}{t^2} > 0 \Leftrightarrow t - a > 0 \Leftrightarrow t > a$$

$$\text{car } \frac{t+a}{t^2} > 0$$

$$\forall t > 0 \qquad f_a'(t) = \frac{(t-a)(t+a)}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t - a = 0 \Leftrightarrow t = a$$

D'où le tableau de variations de f_a.

t	0	a	$+\infty$
$f'_a(t)$	$-$	0	$+$
$f_a(t)$	$+\infty \searrow$	$f_a(a)$	$\nearrow +\infty$

4. D'après les variations de de f_a, on peut en déduire que :

$$\forall t > 0 \qquad f_a(t) \geqslant f_a(a) = \frac{1}{2}(a + \frac{a^2}{a}) = a$$

1.2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$..

1. Par récurrence évidente on peut dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante lorsque $u_0 = a$.

2. On a déjà montré que

$$\text{Pour } t > a \qquad 0 < f'_a(t)$$

Puis

$$f'_a(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a^2}{t^2}) < \frac{1}{2} \text{ car } 1 - \frac{a^2}{t^2} < 1$$

3. Montrons par récurrence que pour tout entier n, non nul :

$$\mathcal{H}_n \qquad u_n \geqslant a$$

$u_0 > 0$, donc $u_1 = f_a(u_0) \geqslant a$ et $\mathcal{H}_1$ est vraie.(Cf tableau de variation de f_a). Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain n, alors $u_n \geqslant a > 0$ et donc

$$u_{n+1} = f_a(u_n) \geqslant a$$

$\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et l'axiome de récurrence achève la démonstration.

4. f_a est continue sur $[a, u_n]$, dérivable sur $]a, u_n[$ avec pour tout t de $[a, u_n]$, $0 \leqslant f'_a(t) \leqslant \frac{1}{2}$.
Appliquons maintenant l'inégalité des accroissements finis à f_a sur l'intervalle $[a, u_n]$.

$$0 \leqslant |f_a(u_n) - f_a(a)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|$$

$$0 \leqslant u_{n-1} - a \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|$$

Puis par récurrence évidente, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. Utilisant le théorème des suites encadrantes, on peut en déduire que la suite (u_n) converge vers a , puisque $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$.

6. Ecrivons un programme en langage Pascal permettant d'obtenir les 100 premiers termes d'une suite (u_n) convergeant vers $\sqrt{2}$ en remplaçant a^2 par 2.

```
Pr ogram ecricome ;
var u: real;
   i : integer ;
begin
u:=1;
for i:=1 to 100 do
   begin
   write(u);
   u:=(u+2/u)/2;
   end;
end.
```

1.3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^{*2}$, la fonction g définie par :

$$g(x,y)=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(1+x)(1+y)$$

1. Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^{*2}$.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}(1+y)\left[(-\frac{1}{x^2})(1+x)+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\right]=\frac{1}{2}(1+y)\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}(1+x)\left[(-\frac{1}{y^2})(1+y)+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\right]=\frac{1}{2}(1+x)\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\right)\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}r=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=\frac{1}{2}(1+y)\frac{2}{x^3}=\frac{1+y}{x^3}\\ t=\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\frac{1}{2}(1+x)\frac{2}{y^3}=\frac{1+x}{y^3}\\ s=\frac{\partial g}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}+(1+x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right]\end{array}\right.$$

2. Cherchons les extremum éventuels annulant nécessairement les dérivées partielles d'ordre 1, l'ensemble $\mathbb{R}_+^{*2}$ étant un ouvert..

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}(1+y)\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right)=0\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}(1+x)\left(-\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x}\right)=0\\ \qquad x>0,y>0\end{array}\right.$$

Mathématiques - OPTION ÉCONOMIQUE

Soit

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x^4 = x(1 - x^3) = 0 \\ y = x^2 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

Le seul point candidat est donc le couple $(1, 1)$. Déterminons le signe de $rt - s^2$

$$rt - s^2 = \left(\frac{1+y}{x^3}\frac{1+x}{y^3} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}\right]^2 \right)_{x=y=1} = 4 - 1 = 3 > 0$$

le couple $(1, 1)$ est un extremum relatif et c'est un minimum puisque $r = 2 > 0$.

3. Vérifions que :

$$g(x, y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1(\frac{x}{y})$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(1 + x)(1 + y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + \frac{x}{y})(1 + y) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + y + 1 + x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) + \frac{1}{2}(y + \frac{1}{y}) + \frac{1}{2}(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1(\frac{x}{y}) \end{aligned}$$

4. Evaluons la différence $g(x, y) - g(1, 1)$:

$$g(x, y) - g(1, 1) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1(\frac{x}{y}) - 4$$
$$g(x, y) - g(1, 1) = f_1(x) + f_1(y) + f_1(\frac{x}{y}) - 3 \geqslant 1 + 1 + 1 - 3 \geqslant 0$$

, puisqu'il a été démontré que pout tout $t > 0 \quad f_1(t) \geqslant 1$.
En conclusion le minimum local est un minimum global de g sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$.

2. EXERCICE.

$M_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
La matrice A suivante étant donnée

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

on définit l'application ϕ_A par :

$$\begin{aligned} \phi_A : M_2(\mathbb{R}) &\to M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \phi_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

2.1. Diagonalisation de A.

1. De façon évidente on vérifie que $A^2 = A$.
Le polynôme $P = X^2 - X$ est annulateur de A. Les valeurs propres possibles de A sont à chercher parmi les racines de P. Donc

$$SpA \subset \{0, 1\}$$

2. Prouvons que la matrice A est diagonalisable.

$$A - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -2-\lambda \\ 3-\lambda & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 6 & -2-\lambda \\ 0 & -\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} \quad L_2 \_ (3-\lambda)L_1 \_ 6L_2$$

La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible pour λ tel que $-\lambda + \lambda^2 = 0$ et donc :

$$SpA = \{0, 1\}$$

Il en résulte que A est diagonalisable puisque les valeurs propres de A sont distinctes et en nombre égal à la taille de la matrice A.
Déterminons une matrice P inversible de $M_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $M_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :

$$A = PDP^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in KerA \Leftrightarrow 3x - y = 0$$
$$KerA = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(A-I) \Leftrightarrow 2x - y = 0$$
$$Ker(A-I) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

La matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifient la relation :

$$A = PDP^{-1}$$

Avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Diagonalisation de ϕ_A.

1. Montrons que ϕ_A est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
&\forall M_1, M_2 \in (M_2(\mathbb{R}))^2, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\
&\phi_A(\alpha M_1 + M_2) = A(\alpha M_1 + M_2) - (\alpha M_1 + M_2)A \\
&\phi_A(\alpha M_1 + M_2) = \alpha(AM_1 - M_1A) + AM_2 - M_2A \\
&\phi_A(\alpha M_1 + M_2) = \alpha\phi_A(M_1) + \phi_A(M_2)
\end{aligned}$$

2. Etablissons que $X^3 - X$ est un polynôme annulateur de ϕ_A.

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}) \qquad \phi_A^2(M) = \phi_A(AM - MA)$$
$$= A(AM - MA) - (AM - MA)A = AM - 2AMA + MA$$

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}) \qquad \phi_A^3(M) = \phi_A(AM - 2AMA + MA)$$
$$= AM - MA = \phi_A(M)$$

On a bien :

$$\phi_A^3 - \phi_A = 0 \text{ (endomorphisme nul)}$$

Les valeurs propres possibles de ϕ_A sont donc à chercher parmi les racines de $X(X^2 - 1) = 0$ soit :

$$Sp\phi_A \subset \{-1, 0, 1\}$$

3. Soit $M \neq 0$ une matrice propre de ϕ_A associée à la valeur propre λ, alors $N = P^{-1}MP \neq 0$ (Sinon $PNP^{-1} = M = 0$) et

$$AM - MA = \lambda M \Rightarrow (APN)P^{-1} - (PNP^{-1})A = \lambda(PNP^{-1})$$
$$\Rightarrow P^{-1}APNP^{-1} - NP^{-1}A = \lambda NP^{-1}$$
$$\Rightarrow P^{-1}APN - NP^{-1}AP = \lambda N \Leftrightarrow DN - ND = \lambda N$$

Réciproquement si $N \neq 0$, alors $M \neq 0$:

$$DN - ND = \lambda N \Rightarrow P^{-1}APN - NP^{-1}AP = \lambda N$$
$$\Rightarrow (APN)P^{-1} - (PNP^{-1})A = \lambda(PNP^{-1})$$
$$\Rightarrow AM - MA = \lambda M$$

et M est une matrice propre de ϕ_A associée à la valeur propre λ.

4. On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

a.

$$DN - ND = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0a = 0 \\ b(0+1) = 0 \\ c(0-1) = 0 \\ 0d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

b. $\lambda = 0$ est valeur propre de ϕ_A si et seulement si M appartient à $Ker\phi_A$

$$M \text{ appartientà } Ker\phi_A \Leftrightarrow DN - ND = 0 \qquad (2.1)$$

c'est-à-dire si et seulement si il existe a et d tels que

$$M = PNP^{-1} = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}P^{-1} = aP\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + dP\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$
$$\Leftrightarrow M = a\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + dA = aM_1 + dA$$

$$Ker\phi_A = Vect\{A, M_1\}$$

La famille (A, M_1) est génératrice de $Ker\phi_A$. De plus les matrices A et M_1ne sont pas colinéaires donc constituent une base de $Ker\phi_A$.

$$\dim Ker\phi_A = 2$$

c. $\lambda \neq 0$ est valeur propre de ϕ_A si et seulement si

$$DN - ND = \lambda N \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a = 0 \\ b(\lambda+1) = 0 \\ c(\lambda-1) = 0 \\ \lambda d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b(\lambda+1) = 0 \\ c(\lambda-1) = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Pour que N soit non nulle il faut que $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.
$\lambda = 1$ est valeur propre de ϕ_A si et seulement si

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = -1$ est valeur propre de ϕ_A si et seulement si

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d.

$$Ker(\phi_A - Id) = Vect\left\{P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\right\} = Vect\left\{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.\right\}$$

$$Ker(\phi + Id) = Vect\left\{P\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\right\} = Vect\left\{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.\right\}$$

et

$$\dim Ker(\phi_A - Id) = \dim Ker(\phi_A + Id) = 1$$

5. L'endomorphisme ϕ_A est diagonalisable car :

$$4 = \dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) = \dim Ker\phi_A + \dim Ker(\phi_A - Id) + \dim Ker(\phi_A + Id)$$

3. EXERCICE.

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

3.1. Mode de paiement de la clientèle.

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$\begin{array}{l} P\left[S=0\cap U=0\right]=0.4 \\ P\left[S=0\cap U=1\right]=0.3 \\ P\left[S=1\cap U=0\right]=0.2 \\ P\left[S=1\cap U=1\right]=0.1 \end{array}$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

   a. Déterminons les lois de S et U. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(U=0, U=1)$,

$$\begin{array}{l} P(S=0)=P\left[S=0\cap U=0\right]+P\left[S=0\cap U=1\right]=0.7 \\ P(S=1)=P\left[S=1\cap U=0\right]+P\left[S=1\cap U=1\right]=0.3 \end{array}$$

   De même,

$$\begin{array}{l} P(U=0)=P\left[S=0\cap U=0\right]+P\left[S=1\cap U=0\right]=0.6 \\ P(U=1)=P\left[S=0\cap U=1\right]+P\left[S=1\cap U=1\right]=0.4 \end{array}$$

   La probabilité $P(U=0)$ que le client règle par carte bancaire est bien égale à $\dfrac{3}{5}=0.6$.

   b. Calculons la covariance du couple (S,U).

$$\begin{array}{l} cov(S,U)=E(SU)-E(S)E(U) \\ =P\left[S=1\cap U=1\right]-P(S=1)P(U=1) \\ =0.1-0.3\times 0.4=-0.02 \end{array}$$

   Les variables S et U ne sont pas indépendantes puisque $cov(S,U)\neq 0$.

   c. Probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire.

$$P(S=1/U=1)=\frac{P\left[S=1\cap U=1\right]}{P(U=1)}=\frac{0.1}{0.4}=\frac{1}{4}$$

2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.
   Une caissière reçoit n clients dans sa journée $(n\geqslant 2)$.
   On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :

-C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
-L_1(resp.L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon.

a. La loi suivie par C_n est une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{3}{5})$ (répétition de n épreuves de Bernouilli indépendantes), d'espérance $E(C_n) = \frac{3}{5}n$ et de variance $V(C_n) = \frac{3}{5}\frac{2}{5}n = \frac{6n}{25}$.

b. La loi de L_1 est déterminée par :

$P(L_1 = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ (aucune des personnes ne paie par carte bleue)
$\forall k \in [[1, n]] \qquad P(L_1 = k) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$
(les $k-1$ premières personnes ne paient pas par carte et la $k^{ième}$ paie par carte)

Puis

$$\sum_{k=0}^{n} P[L_1 = k] = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{3}{5}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} + \left(\frac{2}{5}\right)^n = 1$$

c. La loi de L_2 est déterminée par :

$\forall k \in [[2, n]] \qquad P(L_2 = k) = (k-1)\left(\frac{2}{5}\right)^{k-2}\left(\frac{3}{5}\right)^2$
(au cours des $k-1$ règlement 1 personne paie par carte, les autres non et le $k^{ième}$ règlement se fait par carte)
$P(L_2 = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^n + n\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$
(aucune des personnes ne paie par carte ou une personne et une seule)

3.2. Etude du temps moyen de passage en caisse.

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ est donnée par la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ g(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Son espérance et variance valent respectivement $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$

$$E(X) = V(X) = 1$$

2. Vérifions que f est bien une densité de probabilité.
   f est continue, positive sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} te^{-t}dt = E(X) = 1$$

   montrons que T admet une espérance.

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{0}^{+\infty} t^2e^{-t}dt = E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 2$$

   Le temps moyen de passage en caisse est donc de deux unités de temps.

3. a. La fonction de répartition de T, notée F_T est définie par :

$$\forall x < 0 \qquad F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$$

   Par une intégration par parties,

$$\forall x \geqslant 0 \qquad F_T(x) = \int_{0}^{x} te^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_{0}^{x} e^{-t}dt = 1 - (x+1)e^{-x}$$

   b. Le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités(de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est donné par :

$$P(T > 2/T > 1) = \frac{P(1 < T < 2)}{P(T > 1)} = \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} = \frac{-3e^{-2} + 2e^{-1}}{2e^{-1}} = \frac{2e - 3}{2e}$$

4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.

   a. M désignant le temps d'attente du client C, on a :

$$M = Min(T_A, T_B)$$

   b. Déterminons la fonction de répartition de la variable aléatoire M :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{-*} \qquad P\left[M \leqslant t\right] = 0$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+} \qquad \begin{cases} P\left[M > t\right] = P\left[(T_A > t) \cap (T_B > t)\right] \\ = P\left[T_A > t\right].P\left[T_B > t\right] = (1+t)^2e^{-2t} \\ \text{(par indépendance des variables } T_A \text{ et } T_B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^{+} \qquad F_M(t) = P\left[M \leqslant t\right] = 1 - (1+t)^2e^{-2t} \\ \forall t \in \mathbb{R}^{-*} \qquad F_M(t) = P\left[M \leqslant t\right] = 0 \end{cases}$$

   c. La fonction F_M est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0. M est donc une variable à densité. Une densité de M est définie par la fonction h vérifiant :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^{+} \qquad h(t) = F'_M(t) = 2(1+t)te^{-2t} \\ \forall t \in \mathbb{R}^{-*} \qquad h(t) = F'_M(t) = 0 \end{cases}$$

RAPPORT

Je remercie les correcteurs qui, par leur rapport détaillé de correction, m'ont permis d'établir les remarques suivantes.

BILAN DE LA CORRECTION DES COPIES

Exercice 1
La notion pourtant commune d'asymptote (oblique, verticale) est parfois mal maîtrisée.

Il faut justifier la continuité ou la dérivabilité des fonctions numériques, ainsi que le signe des dérivées.

Les récurrences, même immédiates, doivent être explicitées.

L'usage de l'inégalité des accroissements finis est souvent approximatif dans la formulation des hypothèses et des conclusions. Le programme en Pascal n'est pas souvent donné, et il y a beaucoup d'erreurs (valeur de a non précisée, valeurs de k erronées...) et de complications.

Pour les fonctions à deux variables, il faut préciser que la recherche d'extremum se fait sur une partie ouverte pour une fonction de classe C2. Il faut simplifier les expressions de p,q,r,s,t. La résolution p=q=0, souvent malmenée, faute d'avoir conservé les formes factorisées de p et q, se fait sur cet ouvert, et ne détermine que les points critiques. De façon générale, la distinction entre implication (condition nécessaire) et équivalence (nécessaire et suffisante) est plus qu'approximative (quand elle est précisée !).
Il est rarement montré que l'extremum est global.

Exercice 2
Un polynome annulateur ne fournit que les valeurs propres éventuelles (mais cela évite d'avoir à les chercher !). Reste à s'assurer que ce sont des valeurs propres effectives.

La rédaction faisant intervenir un polynome annulateur de A est souvent incorrecte ou inexistante. La question 2.2.2 n'a été traitée que très rarement. La rédaction précise des équivalences à la question 2.2.3 n'est quasiment jamais présente. La question 2.2.4.d n'a presque jamais été traitée.

Si la diagonalisation simple de la matrice carrée A d'ordre 2 est souvent correctement menée, il n'en a pas été de même de celle de l'endomorphisme Φ, qui supposait une bonne connaissance de la notion d'application linéaire, de valeur propre et de sous-espace vectoriel engendré.

Exercice 3
Il est assez étonnant de constater que des candidats trouvent correctement la probabilité que le client règle par carte bancaire (en utilisant un système complet d'événements), mais n'obtiennent pas les lois de S et de U. Plusieurs candidats trouvent une covariance nulle et en déduisent que les variables S et U sont indépendantes. La détermination des lois de U, de S, et de C_n ne se résume pas à donner le nom de la loi (Bernoulli, binomiale). Il faut donner les (bonnes) valeurs des paramètres et justifier les choix.

A ce titre, la loi de L1 n'était pas géométrique puisque le nombre de clients était limité à n.

Rares sont les candidats en mesure d'étudier correctement la loi de L2.

Dans l'étude des variables à densité, les notations d'intégrale sont souvent fantaisistes (confusion entre variable et borne, entre x et t, entre intégrale impropre et intégrale définie, absence du différentiel).

Une densité de la loi exponentielle n'est pas connue de tous.

Le lien entre X et T est rarement utilisé pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, puis $E(T)$.

Beaucoup d'erreurs dans la reconnaissance de la probabilité de la question 3.b.
L'expression de M en fonction de T_A et T_B donne lieu à de nombreuses expressions absurdes. La question 4.b. est rarement correctement traitée.

CONCLUSION
Les correcteurs souhaitent pour les années futures, de la part des candidats, une nette amélioration dans la présentation des copies, la clarté de l'expression, la précision des justifications, l'encadrement des résultats et l'orthographe. Il faut proscrire les abréviations non conventionnelles telles que I.A.F, I.P.P, S.C.E, S.E.P.

Le concepteur quant à lui veillera à ne pas laisser le flanc à la critique en proposant un sujet peut-être plus conventionnel en algèbre linéaire.

Le sujet a permis de valoriser les candidats ayant fourni un travail sérieux toute l'année. Il est à noter la présence de copies de très bonne qualité. Le sujet a permis, plus que les années passées, de classer les candidats.

Avec un écart-type de **4.98** et une moyenne générale de **10.37** cette épreuve semble avoir joué son rôle discriminant.