PHYSIQUE II

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème I - Modélisation d'une fibre nerveuse

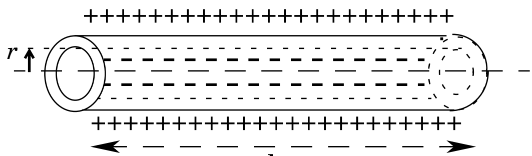


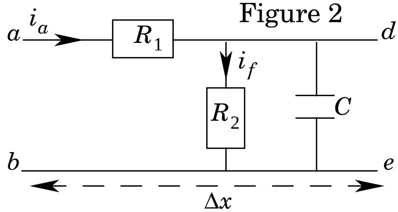
Figure 1

Dans le système nerveux animal, les signaux transportant l'information résultent d'impulsions particulières appelées « stimulus » de nature électrique. Ces impulsions, d'origine biochimique complexe, sont transportées par des fibres nerveuses appelées axones. L'axone est une membrane cylindrique de rayon r de l'ordre de 10^{-6} m et d'épaisseur de l'ordre de 10^{-9}m . Sa longueur l peut dépasser le mètre lorsqu'il joint une cellule spinale de la moelle épinière à une extrémité motrice ou sensorielle. L'axone contient un liquide ionique conducteur, l'axoplasme, qui est chargé négativement au repos (par déficit d'ions potassium K^+) et la membrane de l'axone est alors polarisée (figure 1).

Les événements électriques qui constituent « le signal » dépendent de la distribution des ions de part et d'autre de la membrane de l'axone : quand une stimulation électrique est appliquée à l'axone, il apparaît un changement local de différence de potentiel ; cette perturbation, appelée potentiel d'action (elle sera notée V_0), se propage dans l'axone sous la forme d'un courant d'axone i_a .

Beaucoup de propriétés de la fibre nerveuse peuvent être interprétées en considérant l'axone comme un conducteur ionique imparfaitement isolé et présentant un courant de fuite i_f . Un petit segment d'axone (ab, de), de longueur Δx , est ainsi schématisé figure 2 :

Figure 2



- R_1 est la résistance du segment considéré de l'axone qui s'oppose au courant longitudinal dans l'axoplasme (de résistivité ρ_a).

Filière TSI

- R_2 est la résistance de fuite de la membrane du segment considéré de l'axone.
- C est la capacité de cette même membrane.

Les valeurs de base expérimentales dépendent de la nature des axones. Le tableau ci-dessous précise les paramètres et les données numériques sur lesquels s'appuieront les calculs littéraux et les applications dans deux situations :

- L'axone décrit plus haut muni de sa seule membrane initiale.
- L'axone « myélinisé », muni d'une gaine de myéline formée de lipides et de protéines : cette gaine augmente évidemment l'épaisseur des parois de l'axone et réduit la conductance de fuite G_m (par unité de surface de la paroi) de la membrane et la capacité C_m (par unité de surface de la paroi).

	Axone sans myéline	Axone myélinisé
Résistivité ρ_a de l'axoplasme	$1\Omega \cdot \mathrm{m}$	$1\Omega \cdot \mathrm{m}$
Capacité C_m par unité de surface de la membrane	$10^{-2}\ \mathrm{F \cdot m^{-2}}$	$6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F \cdot m^{-2}}$
Conductance de fuite de la membrane G_m par unité de surface	$5\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m^{-2}}$	$1,67 \cdot 10^{-2}\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m^{-2}}$
Rayon r de l'axone	$3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$	$3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$

I.A - Étude des caractéristiques d'un modèle de segment d'axone de longueur Δx

I.A.1) Déterminer les grandeurs R_1, R_2 et C du segment d'axone en fonction de ρ_a, G_m, C_m, r et Δx (dans la détermination de C, on pourra identifier la paroi, en raison de sa très faible épaisseur, à un condensateur plan).

I.A.2) Déterminer les valeurs numériques correspondantes pour un segment de longueur $\Delta x = 1\ \mathrm{cm}$.

a) D'un axone non myélinisé.

b) D'un axone myélinisé.

I.A.3) On définit par « constante de longueur » la distance λ pour laquelle la résistance R_1 de l'axoplasme et la résistance de fuite R_2 sont égales.

a) Exprimer λ en fonction de ρ_a, G_m et r.

b) Déterminer la valeur numérique de λ :

- Pour un axone non myélinisé.
- Pour un axone myélinisé.

c) Quelle interprétation physique simple peut-on donner de cette constante de longueur ; on comparera les grandeurs $\lambda_{\text{sans myéline}}$ et $\lambda_{\text{avec myéline}}$.

I.A.4) On applique, à l'instant $t = 0$, à l'entrée de l'axone, une perturbation de tension V_0, que l'on suppose constante.

a) En négligeant le courant qui sort du segment d'axone en d (voir figure 2), déterminer l'expression de la différence de potentiel $V(t)$ aux bornes de la capacité C.

b) Déterminer les valeurs numériques de la constante de temps qui caractérise l'évolution de la tension $V(t)$ et celles du rapport V/V_0 après un temps « très long » :

- dans le cas d'un axone sans myéline,
- dans le cas d'un axone avec myéline.

Commenter brièvement les résultats obtenus.

Dans toute la suite, l'hypothèse d'un courant négligeable en d est abandonnée.

I.B - Modèle simplifié d'axone

I.B.1) On considère le réseau infini de la figure 3 et on désigne par R_T la résistance totale de ce réseau (entre les points a et b).

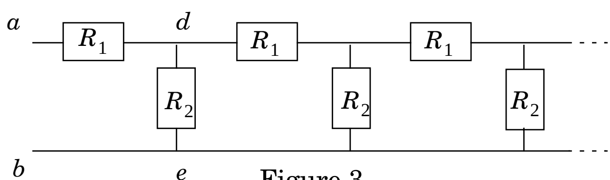


Figure 3

En comparant les résistances de la partie du circuit à droite des points a et b et de la partie du circuit à droite des points d et e, en déduire l'expression de la résistance totale R_T en fonction de R_1 et R_2.

I.B.2) Le réseau précédent est appelé « chaîne atténuatrice ». On se propose de préciser cette dénomination.

a) Montrer que, si la tension appliquée à l'entrée du réseau est $V_{ab} = V_0$, on peut mettre V_{de} sous la forme

$$V_{de} = \frac{V_0}{1+\beta}$$ et exprimer le coefficient β en fonction de R_T, R_1 et R_2.

b) Exprimer la tension V_n après n cellules élémentaires en fonction de V_0, β et n.

c) On suppose $R_2 = R_1$. Au bout de combien de cellules peut-on écrire $V_n \leq 10^{-2} V_0$?

I.B.3) Une « chaîne atténuatrice » formée des seules résistances R_1 et R_2 fournit une première approche permettant de suivre l'évolution de l'amplitude du signal le long d'une fibre nerveuse.

a) On considère un axone non myélinisé. Pour une cellule élémentaire de longueur $\Delta x = 10^{-5}\ \mathrm{m}$, on prendra $R_1 = 3,5 \cdot 10^5 \Omega$ et $R_2 = 1,1 \cdot 10^9 \Omega$.

- Calculer la résistance totale R_T et le coefficient β pour un axone « infiniment » long (en fait, la longueur l de l'axone peut atteindre $1,6\ \mathrm{m}$).
- Déterminer l'atténuation de la différence de potentiel sur une distance $x = 2\ \mathrm{mm}$. Une telle fibre non myélinisée peut-elle permettre un transport d'information sur $l = 1\ \mathrm{m}$?

b) On considère un axone myélinisé. Pour une cellule élémentaire de longueur $\Delta x = 10^{-5}\ \mathrm{m}$, on prendra maintenant $R_1 = 3,5 \cdot 10^5 \Omega$ et $R_2 = 3,2 \cdot 10^{11} \Omega$.

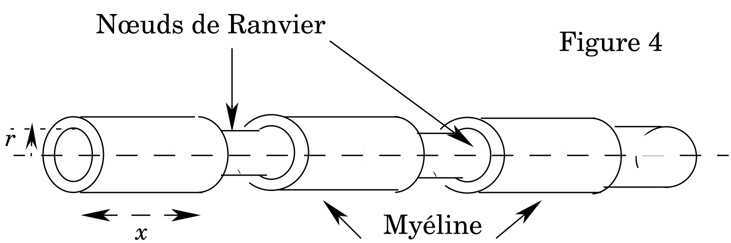


Figure 4

En réalité, dans un tel axone, la myéline est répartie en couches concentriques régulières de longueur comprise entre 1 et $2\ \mathrm{mm}$, séparées par de fines couches de protéines. Les nœuds de séparation, appelés nœuds de Ranvier, sont directement exposés au milieu interstitiel. Ainsi, le signal résiduel, s'il est suffisant, y déclenche une entrée d'ions sodium Na^+ et donc une nouvelle impulsion de potentiel d'action V_0. Grâce à ce processus biochimique, spécifique de tous les êtres vivants, le signal progresse en « conduction par bonds » le long de l'axone (figure 4).

- Déterminer l'atténuation de la différence de potentiel du signal d'un nœud de Ranvier au suivant, en supposant que la distance entre deux nœuds consécutifs est $x = 2\ \mathrm{mm}$. Que pouvez-vous en conclure ?

- On admettra que le temps T requis pour réduire la charge de la membrane et accroître le potentiel du nœud suivant est de l'ordre de la constante de temps définie à la question I.A.4)b) et relative ici à une cellule d'axone comprise entre deux nœuds de Ranvier. En tenant compte des valeurs numériques relatives des résistances R_1 et R_2, montrer que la vitesse de propagation du potentiel d'action s'exprime simplement au moyen d'une grandeur proportionnelle au rayon r de l'axone, le facteur de proportionnalité contenant les paramètres ρ_a, C_m et la distance internodale x.
- Un enfant de taille $l = 1,2\ \mathrm{m}$ marche sur un objet pointu ; en combien de temps le message va parcourir l'aller-retour entre le pied et le cerveau (on rappelle : $x = 2\ \mathrm{mm}$) ?
- Quand une impulsion se propage le long d'un axone, la migration des ions à travers la membrane provoque une inversion de polarité et une variation de potentiel d'environ $100\ \mathrm{mV}$. Quelle est l'énergie totale requise pour « charger» l'axone myélinisé précédent de longueur $l = 1,2\ \mathrm{m}$?

Problème II - À propos de la couleur du ciel

Données et notations :

$\varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$	permittivité du vide
$c = 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$	vitesse de la lumière dans le vide
$m = 9,1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$	masse de l'électron
$-e = -1,6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$	charge de l'électron
$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$	constante d'Avogadro
$R = 8,31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$	constante des gaz parfaits.

À une fonction sinusoïdale du temps $G(t) = G_0 \cos(\omega t + \varphi)$, on associe la fonction complexe $\underline{G(t)} = G_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = \underline{G_0} \cdot e^{i\omega t}$ avec $\underline{G_0} = G_0 e^{i\varphi}$.

$\langle G \rangle$ désigne la valeur moyenne temporelle de la fonction (réelle) du temps $G = G(t)$.

Du point de vue de son interaction avec la lumière solaire du domaine visible (de longueur d'onde λ comprise entre $0,4\ \mu\mathrm{m}$ et $0,8\ \mu\mathrm{m}$) les molécules de l'atmosphère (diazote et dioxygène essentiellement) peuvent être considérées comme de petits « oscillateurs mécaniques » qui présentent ainsi de petits moments dipolaires « oscillants » ; ces molécules ré-émettent alors une partie de la lumière solaire qu'elles ont absorbée lors de leur mise en vibration. Cette diffusion de la lumière est fortement sélective (elle dépend de la longueur d'onde). Nous proposons ici une étude très simplifiée de cette diffusion atmosphérique (encore appelée diffusion Rayleigh).

II.A - Dans une molécule (ou un atome) un électron soumis à l'action du champ électrique $\vec{E}$ d'une onde lumineuse monochromatique de pulsation ω, effectue, en régime établi, des petites oscillations à la pulsation ω. En notation complexe, le déplacement $\underline{\vec{X}}$ de cet électron est régi par l'équation différentielle :

$$m\frac{d^2\underline{\vec{X}}}{dt^2} + m\frac{\omega_0}{Q}\,\frac{d\underline{\vec{X}}}{dt} + m\omega_0^2\underline{\vec{X}} = -e\underline{\vec{E}} = -e\overrightarrow{E_0}e^{i\omega t}$$

où ω_0 et Q désignent des constantes caractéristiques de la particule (atome ou molécule) considérée. La constante Q vérifie $Q \gg 1$. L'amplitude $\overrightarrow{E_0}$ du champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}$ est supposée réelle.

II.A.1)

a) En justifiant votre réponse, préciser l'ordre de grandeur de la vitesse de l'électron dans la molécule (ou l'atome) ? Comparer cette valeur à c.

b) Expliquer pourquoi on peut négliger l'influence du champ magnétique de l'onde.

c) Expliquer pourquoi on peut ne pas tenir compte des déplacements des noyaux dus au champ électrique.

d) Expliquer la présence du terme $m\omega_0^2\underline{\vec{X}}$ dans l'expression ci-dessus.

e) En vous aidant des quelques commentaires fournis dans l'introduction, expliquer la présence du terme

$$m\frac{\omega_0}{Q}\,\frac{d\underline{\vec{X}}}{dt}$$ dans l'expression ci-dessus.

II.A.2) Déterminer, en régime établi, le déplacement de l'électron sous la forme

$$\underline{\vec{X}} = \underline{\overrightarrow{X_0}}\;e^{i\omega t}.$$

Exprimer $\underline{\overrightarrow{X_0}}$ en fonction de m, e, Q, ω_0, ω et $\overrightarrow{E_0}$.

II.A.3) En supposant que la molécule (ou l'atome) ne possède pas de moment dipolaire en l'absence de champ et en admettant que les N électrons de cette molécule (ou de cet atome) ont le même déplacement, en déduire le moment dipolaire $\underline{\vec{p}} = \underline{\overrightarrow{p_0}}\;e^{i\omega t}$ de la molécule (ou de l'atome) induit par le champ électrique.

II.A.4) On pose

$$\underline{\vec{a}} = \frac{d^2\underline{\vec{p}}}{dt^2}.$$

Mettre $\underline{\vec{a}}$ sous la forme

$$\underline{\vec{a}} = \underline{\vec{a_0}}\ e^{i\omega t}$$ et exprimer $\underline{\vec{a_0}}$ en fonction de m, e, Q, N, ω_0, ω et $\vec{E_0}$.

II.A.5) Revenant à la notation réelle, on pose $\vec{a} = Re(\underline{\vec{a}}) = \alpha\vec{E_0}\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\alpha > 0$.

a) Exprimer α et $\tan\varphi$ en fonction de m, e, Q, N, ω_0, et ω.

b) Tracer l'allure du coefficient α en fonction de ω (sans oublier d'indiquer les coordonnées des points caractéristiques). Quel qualificatif peut-on attribuer à cette courbe et à la pulsation ω_0 ?

c) Tracer l'allure de la phase φ en fonction de ω (sans oublier d'indiquer les coordonnées des points caractéristiques).

II.A.6) Pour les molécules constituant l'atmosphère, la pulsation ω_0 se situe dans le domaine de l'ultraviolet lointain. Donner une expression approchée α' du coefficient α, valable pour les molécules atmosphériques soumises à l'action de l'onde lumineuse monochromatique excitatrice précédente faisant partie du rayonnement solaire ; montrer en particulier que le coefficient α' est proportionnel à ω^2.

Dans toute la suite de ce problème, on ne considérera que des molécules atmosphériques soumises à l'action du rayonnement solaire et on utilisera la valeur approchée α' de α. En outre, l'indice optique de l'atmosphère sera pris égal à 1.

II.B - On admet que la « molécule oscillante » étudiée précédemment rayonne dans toutes les directions une puissance électromagnétique moyenne

$$\langle P \rangle = \frac{\langle \vec{a} \cdot \vec{a} \rangle}{6\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

II.B.1) Vérifier l'homogénéité de cette expression. Pourquoi cette puissance est-elle une fonction croissante de la pulsation ω de l'onde électromagnétique monochromatique excitatrice ?

II.B.2) En assimilant l'onde électromagnétique monochromatique excitatrice à une onde plane progressive, déterminer la puissance moyenne $\langle \Pi \rangle$ transportée par unité de surface de plan d'onde par cette onde en fonction de ε_0, c et de la norme E_0 de l'amplitude $\vec{E_0}$ du champ électrique de cette onde.

II.B.3) En déduire le rapport

$$\sigma(\omega) = \frac{\langle P \rangle}{\langle \Pi \rangle} \text{ en fonction de } \varepsilon_0, c, m, e, N, \omega_0 \text{ et } \omega$$

puis en fonction de ε_0, m, e, N, ω_0 et λ. Quelle est la dimension du coefficient σ ? Justifier brièvement votre réponse.

II.B.4)

a) En admettant que le soleil émette la même puissance lumineuse dans l'ensemble du domaine visible, comparer les puissances lumineuses moyennes diffusées par l'atmosphère respectivement dans le bleu (λ de l'ordre de $0,4\ \mu\mathrm{m}$) et dans le rouge (λ de l'ordre de $0,8\ \mu\mathrm{m}$).

b) Interpréter la couleur du ciel (observé en dehors de la direction du soleil) en plein jour par beau temps.

c) Indiquer, de façon qualitative, les éléments manquants au modèle précédent qui permettraient d'expliquer une vision réaliste du ciel.

II.B.5) En traversant l'atmosphère, le rayonnement solaire perd donc de l'énergie du fait de la diffusion. Ainsi, en supposant que l'onde plane monochromatique excitatrice se propage dans la direction Ox, la puissance moyenne $\langle \Pi \rangle$ transportée par cette onde dépend légèrement de x : $\langle \Pi \rangle = \Pi_m(x)$. On admettra néanmoins que la relation établie à la question II.B.3) reste valable.

a) En établissant un bilan d'énergie électromagnétique moyenne dans un cylindre de section unité, compris en les abscisses x et $x + dx$, en déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction $\Pi_m(x)$ (faisant intervenir le coefficient σ et le nombre de molécules atmosphériques n par unité de volume.

b) Montrer que l'expression de la fonction $\Pi_m(x)$ est de la forme

$$\Pi_m(x) = \Pi_m(0)e^{\frac{-x}{L}}$$ et exprimer L en fonction de σ et n.

c) Application numérique : Évaluer l'ordre de grandeur de la longueur L pour la longueur d'onde visible moyenne $\lambda = 0,6 \mu\mathrm{m}$ dans l'air assimilé à un gaz parfait à la température ordinaire $T = 293\ \mathrm{K}$ à la pression ordinaire $P = 1\ \mathrm{atm}$; on prendra $\omega_0 = 1,3 \cdot 10^{16} \mathrm{s}^{-1}$ et $N = 1$.

d) Interpréter la couleur du soleil au crépuscule par beau temps. Pourquoi cette couleur n'est-elle pas la même en plein jour ?

••• FIN •••
