



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

ÉPREUVE ESC

292

Conception : E.S.C. CHAMBERY

ESC__MATS

MATHÉMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Mardi 12 mai 2009, de 14 h. à 18 h.

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère une matrice symétrique H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $H^2 = H$.

Pour tout réel a , on note alors $M(a) = aI + (1-a)H$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. (a) Justifier que pour tout réel a , $M(a)$ est une matrice symétrique et diagonalisable.
- (b) Montrer que pour tous réels a et b , $M(a)M(b) = M(ab)$.
2. Soit a un réel strictement positif.
- (a) Montrer que $M(a)$ est inversible et que $M(\frac{1}{a})$ est son inverse.
- (b) Justifier que $M(a) = {}^t(M(\sqrt{a})) M(\sqrt{a})$.

On suppose que X désigne une matrice colonne propre de $M(a)$ associée à la valeur propre λ .

- (c) Montrer que ${}^t(M(\sqrt{a})X)(M(\sqrt{a})X) = \lambda {}^tX X$ puis justifier que $\lambda > 0$.
- (d) En déduire que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = (x \ y \ z) M(a) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^3.$$

3. Application : On considère le cas où $a=4$ et $H = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Vérifier que $H^2 = H$ (on détaillera les calculs) et expliciter la matrice $M(4)$.
- (b) On note la famille $\mathcal{B} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$.

On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la famille $\mathcal{B}$.

Calculer ${}^tP P$. Que peut-on en déduire concernant la famille $\mathcal{B}$?

Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale pour le produit scalaire φ .

EXERCICE 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.

On définit sur E l'application φ , qui, à toute fonction f de E associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (\varphi(f))(0) &= f(0) \\ \text{si } x > 0, (\varphi(f))(x) &= \frac{6}{x^6} \int_0^x t^5 f(t) dt. \end{aligned}$$

1. Soit $\alpha \geq 0$. On note pour tout $x \geq 0$: $h_\alpha(x) = x^\alpha$. Expliciter $\varphi(h_\alpha)$.
2. Soit f un vecteur quelconque de E .
 - (a) Montrer que pour tout $x > 0$: $(\min_{[0;x]} f) \frac{x^6}{6} \leq \int_0^x t^5 f(t) dt \leq (\max_{[0;x]} f) \frac{x^6}{6}$.
 - (b) Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\min_{[0;x]} f) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\max_{[0;x]} f) = f(0)$ et que $\varphi(f)$ est continue en 0 à droite.
 - (c) Justifier que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que pour tout $x > 0$:

$$(\varphi(f))'(x) = \frac{6}{x} (f(x) - (\varphi(f))(x)).$$
3.
 - (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
 - (b) Justifier que $\text{Ker}(\varphi)$ ne contient que la fonction nulle.
 - (c) Que peut-on dire de la fonction h_α , définie en question 1, relativement à φ ?
4. Soient λ un réel non nul et g une fonction non nulle de E tels que $\varphi(g) = \lambda g$.
 - (a) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $x > 0$:

$$\frac{6(1-\lambda)}{\lambda} g(x) = x g'(x).$$
 - (b) On note pour $x > 0$: $u(x) = x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g(x)$.
 Vérifier que u est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 En déduire que pour tout $x > 0$, $g(x) = g(1) \cdot x^{\frac{6(1-\lambda)}{\lambda}}$.
 En utilisant la continuité de g en 0 à droite, montrer que $\lambda \in]0; 1]$.
5. Application : Déterminer $\text{Ker}(\varphi - \frac{1}{3} \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(\varphi - 2 \text{id}_E)$.

EXERCICE 3

On considère le programme suivant, où l'on rappelle que **random** est une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes.

```

program simulations ;
var U, V, X, Y, Z : real ;
begin
  randomize ;
  U := random ; V := random ;
  X := - ln ( U ) ; Y := - ln ( V ) ;
  Z := X + Y ;
end .

```

1. Montrer que $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
 (On considérera que, du fait que $U = 0$ est de probabilité nulle, $U(\Omega) =]0; 1]$).
2.
 - (a) Quelle est la loi de Y ? Justifier que X et Y sont indépendantes.
 - (b) Déterminer une densité f de Z . Vérifier que si $x \geq 0$, $f(x) = x e^{-x}$.
 - (c) Déterminer la fonction de répartition de Z .

3. (a) On note $T = e^Z$.
Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité.
- (b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
- $$\begin{cases} h(t) = 0 & \text{si } t < 1 \\ h(t) = \frac{\ln t}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$
- est une densité de la variable aléatoire $\frac{1}{UV}$.

EXERCICE 4

On examine dans cet exercice deux méthodes différentes pour tester la contamination par une bactérie de 400 bouteilles de lait choisies au hasard sur le territoire.

Dans tout l'exercice, θ est un réel fixé, élément de l'intervalle $[0; \frac{1}{10}]$.

On suppose que pour chaque bouteille, la probabilité de contamination est égale au réel θ .

On dispose d'un test permettant de manière infaillible de savoir si l'échantillon de lait qu'on lui soumet est contaminé ou non (quel que soit le volume de cet échantillon).

1. Dans cette question on adopte une méthode simple consistant à tester une par une chaque bouteille.

On note X_k la variable de Bernoulli valant 1 si la k -ième bouteille testée est contaminée et 0 si la k -ième bouteille testée est saine.

On supposera dans tout l'exercice que les variables $(X_k)_{1 \leq k \leq 400}$ sont mutuellement indépendantes.

- (a) Justifier que la variable $Z = \frac{1}{400} \sum_{k=1}^{400} X_k$ est un estimateur sans biais de θ .
- (b) Déterminer la variance $V(Z)$ et justifier que $V(Z) \leq \frac{1}{4000}$.
- (c) Montrer que $P(|Z - \theta| \geq 0,05) \leq 0,1$.
Que peut-on en déduire sur l'intervalle de confiance $[Z - 0,05; Z + 0,05]$? (Justifier).

2. Dans cette question on examine une méthode moins directe :

Les 400 bouteilles sont regroupées en 40 lots de 10 bouteilles.

On remplit alors 40 jerrycans $(J_n)_{1 \leq n \leq 40}$ en versant dans chacun la quasi-totalité des 10 bouteilles d'un lot. (on garde dans chaque bouteille un peu de lait pour un futur deuxième examen éventuel).

On teste ensuite chacun des 40 jerrycans :

Si un jerrycan est contaminé, on teste une à une les 10 bouteilles incriminées.

Si un jerrycan n'est pas contaminé, on considère les 10 bouteilles dont il est rempli comme saines.

On note Y_n la variable de Bernoulli valant 1 si le n -ième jerrycan est contaminé et 0 sinon.

Enfin on note T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans cette méthode.

- (a) Montrer que pour tout entier n de $\{1, \dots, 40\}$, $E(Y_n) = 1 - (1 - \theta)^{10}$.
- (b) Justifier que $T = 40 + 10 Y_1 + 10 Y_2 + \dots + 10 Y_{40}$ et que $E(T) = 440 - 400(1 - \theta)^{10}$.
- (c) En déduire que cette méthode est préférable à la première si et seulement si $\theta \leq 1 - e^{-\frac{\ln 10}{10}}$. Est-ce le cas ici? (On donne $e^{-\frac{\ln 10}{10}} \approx 0,79$).