Epreuve ESC 2006
Option Economique
EXERCICE 1

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3},)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Étudier en discutant selon α l'inversibilité de la matrice P_α. (On utilisera la méthode du pivot).

2. On note Q le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.

   (a) Montrer par une méthode du pivot que : λ est valeur propre de $A \Longleftrightarrow Q(\lambda) = 0$.

   (b) Calculer $Q(1)$. En déduire les valeurs propres de A.

   (c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. On définit les triplets $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1)$ et $\overrightarrow{v_2}$=$(4,2,1)$.

   (a) Justifier que $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$ et que $f(\overrightarrow{v_2}) = 2\overrightarrow{v_2}$
   Déterminer le réel α_0 tel que le triplet $\overrightarrow{v_3} = (\alpha_0, 1, 0)$ vérifie$f(\overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{v_2} + 2\overrightarrow{v_3}$.

   (b) Montrer grâce à la question 1 que P_{α_0} est inversible.
   En déduire que la famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Vérifier par calcul que $P_{\alpha_0} \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ce résultat servira en question 4.)

   (d) Sans calculer $P_{\alpha_0}^{-1}$, justifier la relation: $A = P_{\alpha_0}\, T\, P_{\alpha_0}^{-1}$

   (e) Montrer que pour tout entier naturel n, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie :

   $$\begin{cases} u_0 = 1\,;\ u_1 = -1\,;\ u_2 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$$

   (a) On pose , pour tout entier naturel n ,$Y_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Montrer que$Y_{n+1} = A\,Y_n$.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $Y_n = P_{\alpha_0} T^n P_{\alpha_0}^{-1} Y_0$.

   (c) En utilisant la question 3. , exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 2

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on considère l'équation notée (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x ..

1. (a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les limites aux bornes.
   (b) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions , l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

2. Dans cette question on note $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel } k,\ u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

   (a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque $n = 2$
   Calculer $g(-1)$ et $g(-2)$ puis montrer que $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.
   (b) Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k : $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$.
   (c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate,
   montrer que pour tous réels a et b tels que $a \leq -b \leq -1$, $0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b-a)$.
   (d) Montrer que pour tout entier naturel k , $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k : $0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$.
   (e) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite α_2.
   (f) On considère le programme Turbo-Pascal suivant: (où `trunc` désigne la fonction partie entière)

```
program ex2 ;
var N , k :  integer ; epsilon , u :  real ;
begin
     writeln ( ' Donnez un reel strictement positif');
     readln (epsilon );
     N := trunc ( - Ln (epsilon ) ) + 1 ; u .- -1 ;
     for k := 1 to N do ..........................  ;
end.
```

   Montrer que l'entier naturel N calculé dans ce programme vérifie : $\left(\frac{1}{e}\right)^N \leq$ epsilon
   Compléter la partie pointillée de ce programme afin que la variable `u` contienne après son exécution une valeur approchée de α_2 à epsilon près.

3. On revient au cas général où $n \geq 2$.

   (a) Montrer que $1 \leq g(\ln n) \leq n$. En déduire $g(\ln(2n)) \geq n$ (on donne $\ln 2 \simeq 0,69$).
   (b) En déduire que $\ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n)$, puis établir $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

EXERCICE 3

Dans cet exercice R désigne un réel fixé strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \notin [0\,;\,R] \\ f(t) = \dfrac{2t}{R^2} & \text{si } t \in [0\,;\,R] \end{cases}$$

1. (a) Étudier la continuité de f.
   (b) Montrer que f est une densité de probabilité.

On note dans toute la suite X une variable aléatoire réelle de densité f. F_X désigne sa fonction de répartition.

2. (a) Déterminer la valeur $F_X(x)$ lorsque $x < 0$, puis lorsque $x > R$.
   (b) Montrer que pour tout réel x de $[0\,;\,R]$, $F_X(x) = \dfrac{x^2}{R^2}$.
3. (a) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{2R}{3}$.
   (b) Montrer que X admet une variance et que $V(X) = \dfrac{R^2}{18}$

Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul et $X_1,\ X_2 \dots X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On cherche à estimer le réel R à l'aide de $X_1,\ X_2 \dots X_n$.

4. On note $T_n = \dfrac{3}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et on cherche à estimer R avec T_n.

   Montrer que T_n est un estimateur sans biais de R et calculer son risque quadratique noté $r(T_n)$.
5. On note M_n la variable aléatoire prenant pour valeur le maximum des valeurs prises par les variables $X_1,\ X_2 \dots X_n$, de sorte que pour tout réel x, $(M_n \leq x) = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)$.

   (a) Montrer que pour tout réel x , $\mathrm{P}(M_n \leq x) = (F_X(x))^n$. En déduire la fonction de répartition de M_n, puis montrer que M_n est une variable aléatoire à densité.
   (b) Montrer qu'une densité possible de M_n est la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\begin{cases} g_n(t) = 2n\dfrac{t^{2n-1}}{R^{2n}} & \text{si } t \in [0\,;\,R] \\ g_n(t) = 0 & \text{si } t \notin [0\,;\,R] \end{cases}$$

   (c) Montrer que M_n admet une espérance et une variance, et que:

   $$E(M_n) = \frac{2n}{2n+1}R \qquad \text{et} \qquad V(M_n) = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2}R^2$$

   (d) On cherche à estimer R avec M_n :
   Calculer le biais de M_n , noté $b(M_n)$, et son risque quadratique noté $r(M_n)$.
6. (a) Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de $b(M_n)$ et $r(M_n)$.
   (b) Quels sont les avantages et les inconvénients réciproques des estimateurs T_n et M_n ?