Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2006

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème I

Préliminaires

1. (a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad t^n e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ converge.

   On admet dans tout le problème : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

   On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

3. (a) tablir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

   (b) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad I_{2p+1} = 0$.

   (c) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p} p!}\sqrt{\pi}$.

I. Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - x)^2 (t - y)^2 e^{-t^2} dt$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\quad F(x, y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.

2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F.

3. Déterminer les extrémums locaux de F. En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II. Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$ et $\int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}dt$ convergent.

   On note $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}dt$$

2. Etablir, pour tout $a \in \mathbb{R}$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad |\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda\cos a| \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}$.

   On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3. (a) Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \underset{h\to 0}{\to} 0.$

   (b) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad S'(x) = C(x)$.

4. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}S(x)$.

   (b) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad 2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$

   (c) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$$

III. Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}dt$ converge.

   On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}dt.$

2. (a) Montrer, pour tout $u \in [0; +\infty[$: $\quad 0 \leqslant (1 - u + u^2) - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3.$

   (b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad 0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)e^{-t^2}dt - g(x) \leqslant \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6.$

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

IV. Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}e^{-t^2}dt$ converge.

   On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}e^{-t^2}dt.$

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.

   En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

Problème II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n, la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
On considère un n-uplet $(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme :

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

On note C la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P.
On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
On note Id l'application identité de $\mathbb{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.
On note $f^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1. (a) Exprimer, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.
   (b) En déduire : $\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots + a_{n-1}e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{Id}$.
   (a) Vérifier : $g(e_1) = 0$.
   (b) Montrer : $\forall i \in \mathbb{N},\ g \circ f^i = f^i \circ g$.
   (c) En déduire : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ g(e_i) = 0$.
   (d) Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.
   Application 1: Déterminer une matrice $A \in \mathfrak{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.
   (e) tablir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.

3. (a) Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0 \,\mathrm{Id} + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$.
   Calculer $Q(f)(e_1)$.
   (b) En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f.
   (c) Soit λ une racine du polynôme P.
   Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$.
   Vérifier que $(f - \lambda \,\mathrm{Id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.
   (d) Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4. (a) Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $(C - xI_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$.
   En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.
   (b) En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5. (a) Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
   (b) Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C.

   (a) Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $(B - tI_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - tI_n)$ est inversible.

   (b) En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

   (c) Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

   (d) On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, ..., \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, ..., \mu_n$ deux à deux distinctes.
   L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, ..., \mu_n$.

   (a) Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), ..., u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

   (b) Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), ..., u^{n-1}(a)\big)$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.