Epreuve de Mathématiques II-B durée 4h

Notations.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la base orthonormée usuelle $(\vec{i}, \vec{j})$. Un point M de $\mathbb{R}^2$ est représenté par ses coordonnées (x, y) dans le repère usuel $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
Si $f : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application dérivable en un point $(x_0, y_0) \in O$, où O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles de f au point de coordonnées (x_0, y_0) sont notées classiquement par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Lorsqu'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point x on notera la dérivée $\frac{d}{dx}(h(x))$ ou $h'(x)$.

Le but de ce problème est d'étudier une modélisation mathématique du problème de l'écoulement en couche mince d'un fluide visqueux. Le sujet comporte 5 parties qui peuvent être traitées de façon assez largement indépendante. En particulier : La partie B peut être traitée en admettant le résultat de la partie A. La partie C est traitée en admettant le résultat énoncé en B-III. Les questions E-I et E-II sont complétement indépendantes du reste si l'on admet le résultat énoncé en C-II.

A. Partie préliminaire.

Soit f, une application définie sur un ouvert O de $\mathbb{R}^2$ et à valeur dans $\mathbb{R}$

$$f : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Soit g, une application définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$.

$$g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

On suppose que f est de classe C^1 sur O et que g est continûment dérivable sur I.On suppose enfin qu'il existe un intervalle $[c, d]$ de $\mathbb{R}$ non vide, tel que $I \times [c, d] \subset O$ et que $g(I) \subset [c, d]$. On définit la fonction

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ F(x) &= \int_c^{g(x)} f(x, y)dy. \end{aligned}$$

Montrer que F est dérivable sur I et que $F'(x) = g'(x)f(x, g(x)) + \int_c^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$ si $x \in I$.

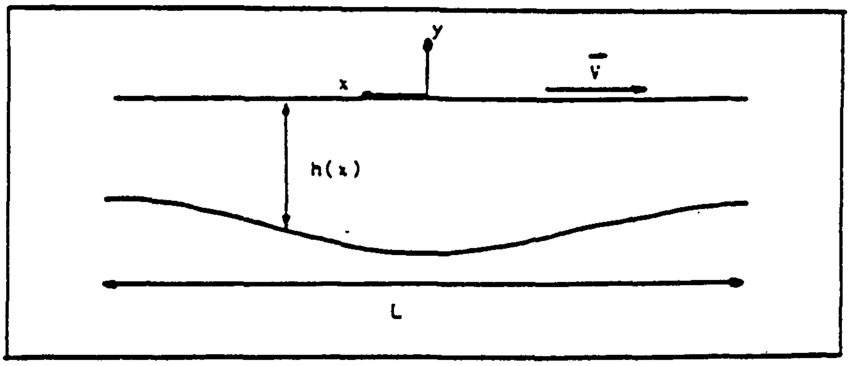

Figure 1.

Partie B.

Soit h une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles strictement positives, indéfiniment dérivable :

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+,*}$$

Soit O, l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad y \in]-h(x), 0[\}$$

On admet que l'écoulement d'un fluide visqueux , confiné entre une paroi inférieure d'équation $y = -h(x)$ et une paroi supérieure d'équation $y = 0$ (figure I), peut, sous certaines hypothèses physiques qui ne font pas l'objet de ce problème, être modélisé mathématiquement de la façon suivante: on recherche

$$\begin{array}{lll} u : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & \text{de classe } C^2 \\ v : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & \text{de classe } C^2 \\ p : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \text{de classe } C^1 \end{array}$$

vérifiant les équations :

$$\forall (x, y) \in O \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = p'(x) \tag{1}$$

$$\forall (x, y) \in O \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0 \tag{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(x, -h(x)) = v(x, -h(x)) = v(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = V. \tag{3}$$

Dans ces équations $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont les composantes suivant $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de la vitesse du fluide et $p(x)$ est la pression au sein de ce fluide. Enfin le nombre V est un réel donné (vitesse de la paroi plane qui met le fluide en mouvement).

I. Exprimer u en fonction de la constante V, des variables x, y, des applications p et h (et éventuellement de leurs dérivées).

II. On définit l'application $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$Q(x) = \int_{-h(x)}^{0} u(x, y)\,dy$$

Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Q'(x) = 0.$$

III. En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{d}{dx}(h^3(x)p'(x)) = 6Vh'(x)$$

Partie C.

On suppose que les fonctions h et p définies en partie B sont périodiques de période $L > 0$.

I.a Montrer que h atteint ses bornes sur $\mathbb{R}$. On note
$$h_0 = \inf\{h(x),\ x \in \mathbb{R}\}$$
et
$$h_1 = \sup\{h(x),\ x \in \mathbb{R}\}$$
Montrer que $h_0 > 0$.

I.b Montrer que p' s'annule sur $[0, L[$.

II.a Montrer, en utilisant les résultats de la partie B l'existence de $h^* \in \mathbb{R}$ tel que
$$p'(x) = 0 \text{ si et seulement si } h(x) = h^*.$$

II.b Montrer que
$$h^* = \frac{\displaystyle\int_0^L \frac{1}{h^2(x)}dx}{\displaystyle\int_0^L \frac{1}{h^3(x)}dx}$$

II.c En remarquant pour tout x que $h_0 h(x)^2 \leq h(x)^3 \leq h_1 h(x)^2$, montrer que $h_0 \leq h^* \leq h_1$. Montrer qu'un cas d'égalité n'est possible que si h est une fonction constante.

III.a Montrer que u s'écrit dans O de la façon suivante :
$$\forall (x,y) \in O,\ u(x,y) = V\{3\frac{y}{h(x)}(1 + \frac{y}{h(x)})(1 - \frac{h^*}{h(x)}) + (1 + \frac{y}{h(x)})\}$$

III.b En déduire pour tout $(x, y) \in O$ la valeur de $v(x, y)$.

III.c L'hypothèse de dérivabilité est-elle vérifiée pour u et v?

Partie D.

Les hypothèses sont celles de la partie C. On suppose, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in]-h(x_0), 0[$ donnés, l'existence d'une unique trajectoire définie par le couple de fonctions $t \to X(t)$ et $t \to Y(t)$, de classe C^1 définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R},$$
$$\frac{dX(t)}{dt} = u(X(t), Y(t)),$$
$$\frac{dY(t)}{dt} = v(X(t), Y(t)),$$
$$X(0) = x_0, \qquad Y(0) = y_0.$$

On admet que l'existence de trajectoires fermées implique qu'il existe $x \in [0, L]$ tel que l'application $y \to u(x, y)$ change de signe sur $[-h(x), 0[$.

I Expliciter cette condition par un dessin.

II Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe des trajectoires fermées est que

$$\frac{h^*}{h_1} < \frac{2}{3}.$$

Partie E. Cas particulier.

On suppose ici que h est donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{a + b\cos(\frac{2\pi x}{L})},$$

où a et b sont des éléments de $\mathbb{R}^{+,*}$

I. Comment faut-il choisir a et b pour que h soit bien définie ? On choisira alors a et b tels que $h(0) = h_0$ et $h(\frac{L}{2}) = h_1$.

II. Calculer h^*.

III.a Exprimer $\frac{h^*}{h_1}$ à l'aide de $\alpha = \frac{h_1}{h_0}$. Calculer la valeur de $\frac{h^*}{h_1}$ pour $\alpha = 0$ et sa limite pour $\alpha \longrightarrow \infty$

III.b Montrer que l'on peut choisir α pour qu'il puisse exister des trajectoires fermées.