Epreuve de Mathématiques I-B

durée 4h

Problème

Le sujet de ce problème est l'étude de certaines solutions de l'équation différentielle non-linéaire

$$(*) \qquad f'' = f^2.$$

On dira qu'une fonction f est solution de $(*)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ lorsque f est une fonction réelle, définie et de classe C^2 sur I et telle que pour tout $x \in I$,

$$f''(x) = f(x)^2.$$

****

Les Parties I et II sont indépendantes

****

Partie I

1) Soit f une solution de $(*)$ sur l'intervalle I.

a) On se donne un réel c, et on définit

$$I_c = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x + c \in I\}.$$

Vérifier que I_c est un intervalle et que la fonction $\hat{f}$ définie pout tout $x \in I_c$ par

$$\hat{f}(x) = f(x+c)$$

est solution de $(*)$ sur I_c.

b) On définit maintenant $\tilde{I} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \; -x \in I\}$. Vérifier que la fonction $\tilde{f}$ définie pour tout $x \in \tilde{I}$ par $\tilde{f}(x) = f(-x)$ est solution de $(*)$ sur $\tilde{I}$

2)

a) Déterminer les réels $d > 0$ et $\gamma > 0$ tels que la fonction f définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{d}{x^\gamma}$$

soit solution de $(*)$ sur $]0, +\infty[$.

b) En déduire une solution non-nulle de $(*)$ sur $]-\infty, 0[$ (on pourra utiliser la question I-1-b).

c) Soit $b \in \mathbb{R}$. Construire en utilisant les questions précédentes une solution non-nulle g_b de $(*)$ sur $]b, +\infty[$ et une solution non-nulle $f_b(x)$ de $(*)$ sur $]-\infty, b[$ telles que

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x > b}} g_b(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f_b(x) = +\infty.$$

3) Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$ tel que $[0,1[\subset I$. On suppose dans cette question que f est une solution de $(*)$ sur I telle que $f'(0)=0$ et $f(0)\neq 0$.
a) Montrer que f' est croissante sur I.
b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que pour tout $x\in[0,\varepsilon]$,

$$f''(x) \geq \frac{f(0)^2}{2}.$$

En déduire que pour tout $x \in]0,\varepsilon]$, $f'(x)>0$.
c) En déduire que f est strictement croissante sur I.
d) Montrer que pour tout $x\in I$,

$$f'(x)^2 - \frac{2}{3}(f(x)^3 - f(0)^3) = 0$$

(on pourra par exemple étudier la dérivée de cette expression).
e) En déduire que pour tout $x \in I$,

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - f(0)^3}}.$$

4) Pour tout réel w, on définit l'intégrale impropre

$$J(w) = \int_w^\infty \frac{dy}{\sqrt{y^3 - w^3}}.$$

Etudier la convergence de cette intégrale en fonction de w. Montrer que pour tout réel $w>0$,

$$J(w) = \frac{J(1)}{\sqrt{w}} \text{ et } J(-w) = \frac{J(-1)}{\sqrt{w}}.$$

5) En déduire qu'il n'existe pas de fonction f solution de $(*)$ sur $[0,+\infty[$ telle que $f'(0)=0$ et $f(0)\neq 0$.

Partie II

On suppose que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels et on définit pour tout entier $k\geq 0$,

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j}.$$

On admet le résultat suivant:
Si la série entière $\sum_{k\geq 0} a_k x^{2k}$ a pour rayon de convergence $R\neq 0$, alors la série entière $\sum_{k\geq 0} b_k x^{2k}$ a pour rayon de convergence R, et pour tout nombre réel x tel que $|x|<R$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}\right)^2.$$

1)
a) Pour tout entier $k \geq 1$, établir les relations suivantes:

$$\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \quad 2k(2k-1) \geq \frac{(k+1)^2}{2}$$

et

$$k^2 + 2k \geq \frac{3}{4}(k+1)^2.$$

b) En déduire pour tout entier $k \geq 1$ la valeur de $\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)(k-j)$ et vérifier que

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{(k+1)^3}\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)(k-j) \leq \frac{1}{6}.$$

2) On suppose maintenant que la série entière $\sum_{k\geq 0} a_k x^{2k}$ a un rayon de convergence $R > 0$. On définit pour tout réel $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

Quelles conditions les coefficients a_k doivent-ils vérifier pour que f soit une solution de $(*)$ sur $]-R, R[$?

3) On définit maintenant la suite $(c_k)_{k\geq 0}$ par récurrence de la manière suivante: $c_0 = 1$ et pour tout entier $k \geq 1$,

$$c_k = \frac{1}{2k(2k-1)}\sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j}.$$

a) Vérifier que $c_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\frac{1}{4(k+1)^2}\sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j} \leq c_k \leq \frac{2}{(k+1)^2}\sum_{j=0}^{k-1} c_j c_{k-1-j}.$$

4)
a) Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geq 0$,

$$\frac{k+1}{32^k} \leq c_k \leq \frac{k+1}{3^k}$$

(on pourra utiliser les questions II-3-b et II-1-b).
b) En déduire que le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^{2k}$ est strictement positif et fini.

5) On définit maintenant, pour tout nombre réel z non-nul, et pour tout entier $k \geq 0$, $C_k(z) = c_k z^{k+1}$.
a) Pour tout nombre réel non-nul z fixé, on note $R(z)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geq 0} C_k(z)x^{2k}$. Montrer que

$$R(z) = \frac{\rho}{\sqrt{|z|}}.$$

En déduire qu'il existe un unique réel strictement positif z_0 tel que $R(z_0) = 1$.
b) Soit z un réel non-nul. Montrer que la fonction réelle h_z définie pour tout nombre réel $x \in]-R(z), R(z)[$ par

$$h_z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z)x^{2k}$$

est solution de $(*)$ sur $]-R(z), R(z)[$.

Partie III

On reprend les notations introduites dans la question II-5. On définit, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z_0)x^{2k} \text{ et } v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} C_k(z_0)x^{2k}.$$

On rappelle le résultat suivant de la question II-5: u **et** v **sont solutions de** $(*)$ **sur** $]-1,1[$.

On admet en outre dans cette partie que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} u(x) = +\infty.$$

1) Vérifier que $u(0) = -v(0) = z_0$ et que $u'(0) = v'(0) = 0$. En déduire que pour tout $x \in]0,1[$,

$$x\sqrt{\frac{2}{3}} = \int_{z_0}^{u(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - (z_0)^3}} = \int_{-z_0}^{v(x)} \frac{dy}{\sqrt{y^3 + (z_0)^3}}$$

(on pourra utiliser les résultats de la question I-3).

2) Montrer que $J(z_0)^2 = 2/3$ et en déduire la valeur de z_0 en fonction de $J(1)$ (on pourra utiliser les résultats de la question I-4).

3) Montrer que $J(1) < J(-1)$. En déduire qu'il existe un unique réel $\lambda > -1$ tel que

$$J(1) = \int_{-1}^{\lambda} \frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}.$$

4) Montrer l'existence de la limite à gauche

$$L = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} v(x)$$

et exprimer L en fonction de λ et $J(1)$.