Banque <<Agro>>
A et AE - 1001

MATHÉMATIQUES
Épreuve C
Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve

Les parties 3 et 4 sont indépendantes des parties 1 et 2. Les notations de la partie 1 sont utilisées dans la partie 2.

1. Quelques sommes classiques.

On note F l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $\triangle$ l'application de F dans F qui à une fonction f associe la fonction

$$\triangle f \ : \ x \to f(x+1) - f(x)$$

et ∇ l'application de F dans F qui à une fonction f associe la fonction

$$\nabla f \ : \ x \to f(x) - f(x-1).$$

On considère dans cette partie deux entiers naturels n et p, $n \leq p$.

1.1. Montrer que $\triangle$ et ∇ sont des applications linéaires.

1.2. Soient f et g deux applications de F. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, les valeurs de ∇ et de $\triangle$ pour le produit fg des fonctions f et g sont données par :

$$(\nabla(fg))(x) = (\nabla f)(x)g(x) + f(x-1)(\nabla g)(x)$$

$$(\triangle(fg))(x) = (\triangle f)(x)g(x) + f(x+1)(\triangle g)(x).$$

1.3. Montrer que : $\sum\limits_{k=n}^{p} (\triangle f)(k) = f(p+1) - f(n)$.

1.4. Soit c un réel strictement positif, distinct de 1; on note h la fonction qui à tout x réel associe c^x. Déterminer $\triangle h$; en déduire une fonction h_1 telle que $\triangle h_1 = h$ et simplifier l'expression de $\sum\limits_{k=n}^{p} c^k$.

1.5. Montrer que : $\sum\limits_{k=n}^{p} f(k)(\triangle g)(k) = (fg)(p+1) - (fg)(n) - \sum\limits_{k=n}^{p} g(k+1)(\triangle f)(k)$.

1.6. En déduire $\sum\limits_{k=n}^{p} kc^k$.

T.S.V.P.

2. Polynômes factoriels.
Pour tout entier naturel n, on note E_n l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pose $F_0(x) = 1$ et pour tout k, entier naturel non nul, on note $F_k(x) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$.

2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(F_0, \cdots, F_n)$ est une base de E_n.

2.2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que $\triangle F_n = nF_{n-1}$.

2.3. On définit $\triangle^0 = id_F$ (l'application identité de F), $\triangle^1 = \triangle$ et pour tout entier k supérieur ou égal à 1, $\triangle^k = \triangle \circ \triangle^{k-1}$. Calculer $\triangle^3(F_5)$.

2.4. Soit n un entier naturel; un polynôme P, de degré n, est dit "écrit sous forme factorielle" s'il est représenté sous la forme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k F_k(x)$. Mettre x^3 sous forme factorielle et en déduire $\triangle(x^3)$.

3. Schéma de Horner.
Soient z un réel et $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme de degré n, $a_n, \cdots, a_0$ étant des réels, a_n distinct de 0.

3.1. Soit $k \in \mathbb{N}$, k inférieur ou égal à n. Combien faut-il effectuer de multiplications pour calculer $a_k z^k$ (de façon naïve, sans faire appel à des techniques d'exponentiation rapide)? Combien alors faut-il effectuer d'opérations (additions et multiplications) pour calculer $P(z)$?

3.2. Programmes :
3.2.a. Compléter la fonction suivante de deux variables : z, un réel, et n, un entier supérieur ou égal à 1, qui est rédigée en Pascal et calcule z^n :

```
Function Puissance(z:real;n:integer): real;
var P:real; i:integer;
begin
    P:=...;
    for i:=1 to n do ...;
Puissance:=P;
end;
```

3.2.b. On suppose que Max est une constante et on définit le type polynôme comme un tableau indexé de -1 à Max. Si P est un polynôme, P[-1] est le degré du polynôme, entier inférieur ou égal à Max, et P[0],...,P[P[-1]] sont ses coefficients. Compléter la fonction suivante qui renvoie P(z) en utilisant la fonction Puissance :

```
Function PdeZ(P:polynome;z:real): real;
var res:real;i,n:integer;
begin
    n:=P[-1];
    res:= ...;
    for i:=1 to n do res:=...;
PdeZ:=res;
end;
```

3.3. On écrit maintenant le polynôme sous la forme suivante:
$P(x) = (a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1)x + a_0$
$P(x) = ((a_n x^{n-2} + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0$
$P(x) = (((a_n x^{n-3} + \cdots + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$
...
$P(x) = ((\cdots((a_n)x + a_{n-1})x + \cdots + a_2)x + a_1)x + a_0$.

Pour calculer $P(z)$, on calcule successivement les nombres $b_n, b_{n-1}, \cdots, b_0$ définis par
$b_n = a_n$, $b_{n-1} = a_{n-1} + zb_n$, $b_{n-2} = a_{n-2} + zb_{n-1}$, $\cdots$, $b_k = a_k + zb_{k+1}$, $\cdots$, $b_0 = a_0 + zb_1$.
On a donc $b_0 = P(z)$. Cette méthode pour calculer $P(z)$ s'appelle le schéma de Horner. Déterminer le nombre d'opérations arithmétiques nécessaires pour calculer $P(z)$ par ce schéma. Compléter la fonction suivante, rédigée en Pascal, permettant de calculer $P(z)$ par le schéma de Horner.

```
Function Horner(P:polynome;z:real):real;
var res:real;i,n:integer;
begin
    n:=P[-1];
    res:= P[n];
    for i:=n-1 downto 0 do res:=...;
Horner:=res;
end;
```

3.4. Appliquer le schéma de Horner au polynôme $P_0(x) = 3x^5 - 7x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 10x + 14$ pour calculer $P_0(2)$. Donner les valeurs obtenues qu'on notera $b_{0,5}, b_{0,4}, \cdots, b_{0,0}$.

3.5. Soit $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_1$ (où $b_n, \cdots, b_0$ sont les coefficients définis dans la question (3.3)). Démontrer que $P(x) = Q(x)(x - z) + b_0$. (le polynôme $Q(x)$ s'appelle par définition le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - z$).

3.6. L'application répétée du schéma de Horner permet également de calculer les dérivées successives et le polynôme de Taylor.

3.6.a. On considère le polynôme P_0 de la question (3.4.). On appelle P_1 le polynôme quotient de la division de P_0 par $x - 2$, P_2 le quotient de la division de P_1 par $x - 2$, et ainsi de suite jusqu'à P_5. On trouve ces polynômes par applications successives du schéma de Horner. Déterminer ces 5 polynômes. On notera $b_{i,j}$ les coefficients trouvés en appliquant le schéma de Horner au polynôme P_i. (Les coefficients $b_{0,5}, b_{0,4}, \cdots, b_{0,0}$ ont déjà été trouvés à la question (3.4.).) Présenter les coefficients $b_{i,j}$ pour $i = 0, \cdots, 5$ dans un tableau triangulaire.

3.6.b. En déduire l'existence de six réels $c_0, \cdots, c_5$, tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{5} c_k (x-2)^k.$$

et déterminer les valeurs de $c_0, \ldots, c_5$.
3.6.c. Donner, en le justifiant, les valeurs de $P^{(k)}(2)$, pour $k \in \{0, \cdots, 5\}$.

T.S.V.P

4. Polynômes d'interpolation.

Soient n un entier naturel, $a < b$ deux réels et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ $n+1$ réels deux à deux distincts de l'intervalle $[a, b]$. On rappelle que E_n est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et on considère les polynômes

$Q_0(x) = 1, Q_1(x) = (x-\alpha_1), Q_2(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2), \cdots, Q_n(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$

4.1. Montrer que $(Q_0, \cdots, Q_n)$ est une base de E_n.

4.2. Soit $P \in E_n$. Montrer que le $(n+1)$-uplet des coordonnées $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ de P dans la base $(Q_0, \cdots, Q_n)$ est la solution d'un système linéaire que l'on précisera .

4.3. Dans le cas particulier de $n = 3, a = 0, b = 5, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 4$, décomposer le polynôme $P_0(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ dans la base (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3).

4.4. Soit f_0 une fonction définie sur $[0, 5]$, telle que $f_0(0) = 1, f_0(2) = 5, f_0(3) = 10, f_0(4) = 15$ et $f_0(5) = 25$. Montrer qu'il existe un unique polynôme R de E_3 vérifiant $R(k) = f_0(k)$ pour $k \in \{0, 2, 3, 4\}$. Déterminer ce polynôme.

4.5. On veut maintenant trouver un polynôme R_0 de degré inférieur ou égal à 4 vérifiant $R_0(k) = f_0(k)$ pour $k \in \{0, 2, 3, 4, 5\}$. Démontrer l'existence de R_0 et l'exprimer simplement à l'aide du polynôme trouvé à la question précédente.

4.6. On revient au cas général. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P_n de E_n qui coïncide avec f en $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ et expliquer comment trouver les composantes de P_n dans la base $(Q_0, \cdots, Q_n)$.

4.7. Etude de la validité de l'approximation de f.

On suppose, de plus, f de classe C^{n+1}.

4.7.a. Soit $x \in [a, b]$, distinct des α_i. On considère la fonction φ, définie sur $[a, b]$ par :

$$\forall t \in [a, b], \varphi(t) = f(t) - P_n(t) - (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_{n+1})A.$$

Déterminer A pour que $\varphi(x) = 0$. Dans la suite de la question, on suppose A ainsi fixé. En appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\eta \in [a, b]$ tel que

$$A = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta).$$

4.7.b. Montrer que $\forall x \in [a, b]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|.(b-a)^{n+1}.$$

4.8. On utilise $\int_a^b P_n(t)dt$ comme valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$. Donner un majorant de l'erreur commise.

4.9. En étudiant

$$\lim_{x \to \alpha_1} \frac{f(x) - P_n(x)}{x - \alpha_1}$$

montrer que, en utilisant $P_n'(\alpha_1)$ comme valeur approchée de $f'(\alpha_1)$, l'erreur commise est majorée par

$$\frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|.|(\alpha_1 - \alpha_2)\cdots(\alpha_1 - \alpha_{n+1})|.$$

FIN.