Banque « Agro »
A et AE - 0398-

MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE C
Durée : 3h

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

<u>PARTIE I</u> *L'objet de cette partie est la détermination d'un équivalent de n! à l'infini.*

1. On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par la relation :

$$f(x) = \ln(1+x)$$

1.a. Déterminer $f^{(n)}(x)$, pour tout entier naturel n non nul et x strictement supérieur à -1.
1.b. En déduire, pour tout x strictement positif, l'existence d'un réel $\alpha(x)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^4} \leq \alpha(x) < 1 \\ \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}\alpha(x) \end{cases}$$

2. Pour tout n entier naturel non nul, on pose :

$$g(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

2.a. Justifier, pour n non nul, l'encadrement :

$$0 < g(n) \leq \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

2.b. Montrer que, pour n supérieur ou égal à 4, on a :

$$\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{3}$$

2.c. En déduire, pour tout n supérieur ou égal à 4 :

$$0 < g(n) \leq \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right]$$

puis :

$$0 < g(n) \leq \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right]$$

3. On considère la suite u définie, ppur tout n entier naturel non nul, par son terme général :

$$u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) + n$$

3.a. Exprimer $v_n = u_n - u_{n+1}$ en fonction de g et de n. Montrer que l'on a pour $n > 4$:

$$\sum_{k=4}^{n-1} v_k = u_4 - u_n$$

3.b. Justifier l'encadrement, pour tout $n > 4$:

$$0 < \sum_{k=4}^{n-1} v_k \leq \frac{1}{36}$$

En déduire que la suite u converge vers un réel C qui vérifie :

$$u_4 - \frac{1}{36} \leq C \leq u_4$$

4. Montrer (en considérant son logarithme) que la quantité :

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

admet une limite strictement positive K lorsque n tend vers l'infini. En déduire l'équivalent :

$$n! \sim K n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

5. En utilisant la question **3.b.** donner un encadrement de K avec 2 décimales.

PARTIE II Quelques résultats préliminaires.

A. Somme de n variables de Poisson indépendantes.

On considère $(X_1, ..., X_n)$ n variables aléatoires indépendantes, suivant chacune une loi de Poisson de paramètre 1. On note : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

1. Déterminer la loi de S_2.

2. Justifier par récurence la relation, pour k entier naturel :

$$P[S_n = k] = \frac{e^{-n} n^k}{k!}$$

3. Donner en fonction de n l'espérance et la variance de S_n.

B. Des inégalités.

1. Justifier, pour tout réel x positif ou nul, la relation :

$$1 - x \leq e^{-x}$$

2. Dans cette question, n et k sont des entiers naturels non nuls. En utilisant la question 1, justifier l'inégalité :

$$\prod_{i=0}^{k} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right)$$

3. Dans toute la suite du problème, pour n et k entiers naturels non nuls vérifiant :

$$1 \leq k \leq n+1$$

on posera :

$$a(k,n) = \frac{n^k}{(k-1)!}$$

3.a. Exprimer $a(1, n)$ en fonction de n.
En mettant en oeuvre, après l'avoir justifié, la relation pour tout i ($1 \leq i \leq k-1$) :

$$a(i+1,n) = \frac{n}{i} \times a(i,n)$$

écrire une suite d'instructions en langage Pascal, permettant, k et n étant des entiers fixés de déterminer $a(k, n)$.
3.b. Montrer que l'on a :

$$\frac{a(n-k,n)}{a(n+1,n)} \leq \exp\left(-\frac{k^2}{2n}\right)$$

<u>*PARTIE III*</u> *Une méthode de détermination de la constante K.*
M désigne dans toute la suite de ce problème un réel strictement positif. On rappelle que, pour tout réel x strictement positif, $[x]$ (partie entière de x) désigne l'unique entier naturel p qui vérifie :

$$p \leq x < p+1$$

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -x & \text{si} \quad x \in [-M, 0] \\ h(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.a. Représenter graphiquement la fonction h. Etudier sa continuité sur $\mathbb{R}$.
1.b. Justifier l'existence de l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

et l'exprimer en fonction de M.
1.c. On reprend ici les notations de II.A. et on pose, pour n entier naturel non nul :

$$Y_n = h\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)$$

Justifier pourquoi on peut approximer la loi de $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ par la loi normale centrée réduite. On admettra alors que l'espérance de la variable aléatoire Y_n admet comme limite, lorsque n tend vers l'infini, l'espérance d'une variable $h(\mathrm{N})$, où N suit une loi normale centrée réduite. Exprimer cette limite en fonction de M.
2.a. Montrer qu'il existe un entier naturel n_1, tel que, pour tout n supérieur ou égal à n_1, l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$n - M\sqrt{n} \geq 1$$

On supposera dans toute la suite de ce problème que $n \geq n_1$.

On pose : $\beta = [M\sqrt{n}]$

En remarquant que, si k est un entier naturel, on a :

$$h\left(\frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n-k}{\sqrt{n}}$$

si et seulement si : $n - \beta \leq k \leq n$, vérifier qu'on a dans ce cas : $k \geq 1$.
En déduire la relation :

$$E[Y_n] = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_{k=n-\beta}^{n} \left(\frac{n^{k+1}}{k!} - \frac{n^k}{(k-1)!}\right)$$

Puis :

$$E[Y_n] = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} (a(n+1,n) - a(n-\beta,n))$$

où les notations sont celles de la partie II.B.

3.a. Justifier la suite d'inégalités :

$$E[Y_n] \leq \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} (a(n+1,n)) \leq E[Y_n] + \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} (a(n-\beta,n))$$

3.b. En déduire, en utilisant II.B. :

$$E[Y_n] \leq \frac{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} \leq E[Y_n] + \frac{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} e^{\frac{-\beta^2}{2n}}$$

3.c. En utilisant, après l'avoir justifié, l'encadrement :

$$M\sqrt{n} - 1 < \beta \leq M\sqrt{n}$$

déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini de :

$$e^{-\frac{\beta^2}{2n}}$$

3.d. Démontrer l'encadrement :

$$\frac{1 - e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{K} \leq \frac{1 - e^{-\frac{M^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-\frac{M^2}{2}}}{K}$$

puis, à l'aide d'un passage à la limite que l'on justifiera, déterminer la valeur de K.
On aura alors démontré la formule de Stirling, donnant, à l'infini, l'équivalent :

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$