MINES 92 ÉNONCÉ MATH 2

Notations et objectifs

- n désigne un entier > 1 et E l'ensemble des matrices carrées (n, n) à termes réels ; A^{T} est la matrice transposée de A. On utilisera $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ base canonique de E.
- Les vecteurs x, y,... de $\mathbb{R}^n$ seront désignés aussi par des matrices colonnes X, Y,... ; $\mathbb{R}^n$ sera muni du produit scalaire $(.|.)$ défini par : $(x|y) = (X|Y) = X^{\mathrm{T}}.Y$. La base canonique $(e_i)_{1\le i\le n}$ de $\mathbb{R}^n$ sera représentée par les matrices colonnes $(E_i)_{1\le i\le n}$. On pourra utiliser la relation $E_{ij} = E_i.E_j^{\mathrm{T}}$.
- La norme d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ sera notée $|X|$. L'espace vectoriel E sera muni du produit scalaire $((.|.))$ défini par : $((A|B)) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}.B)$. Le couple $(E, ((.|.)))$ est un espace euclidien. La norme d'une matrice sera notée $\|A\|$.

Le but du problème est de prouver que, pour une matrice M donnée, on peut trouver une matrice P, de rang inférieur à celui de M, telle que la distance de M à P soit minimale.

Partie I

Étude des matrices de rang 1

I.1. Factorisation des matrices de rang 1

a. Soit m un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que m est de rang 1 si et seulement s'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et une forme linéaire u définie sur $\mathbb{R}^n$, non nuls, tels que pour tout vecteur t de $\mathbb{R}^n$: $m(t) = u(t).x$
Exemple : reconnaître M lorsque $x = e_i$, $u = e_j^*$ où $(e_i)_{1\le i\le n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $(e_j^*)_{1\le j\le n}$ la base duale associée.

b. En déduire l'expression générale d'une matrice M de rang 1 à l'aide du produit d'une matrice colonne X et d'une matrice ligne Y^{T}.

c. Établir les relations qui lient les matrices colonnes X, X' et Y, Y' lorsqu'une même matrice M de rang 1 est égale aux produits $X.Y^{\mathrm{T}}$ et $X'.Y'^{\mathrm{T}}$.
Montrer que, si $X.Y^{\mathrm{T}} = 0$ alors $X = 0$ ou $Y = 0$.

I.2. Rang d'une famille de matrices de rang 1

a. Démontrer que toute matrice M de E est égale à une somme de matrices de rang 1.

b. Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$; démontrer que la suite des matrices $(X_i.Y_j^{\mathrm{T}})_{1\le i,j\le n}$ est une base de E.

c. Soient $(U_1, U_2, \ldots, U_p)$ et $(V_1, V_2, \ldots, V_q)$ deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, de rangs respectifs r et s.
Déterminer le rang de la famille des matrices $(U_i.V_j^{\mathrm{T}})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le q}}$ en tant que vecteurs de E.

I.3. Orthogonalité des matrices de rang 1 dans $E, ((.|.))$

a. À quelle condition sur les vecteurs X, X', Y, Y' de $\mathbb{R}^n$, les matrices $X.Y^{\mathrm{T}}$ et $X'.Y'^{\mathrm{T}}$ sont-elles orthogonales dans $E, ((.|.))$?

b. En déduire comment choisir deux suites $(X_i)_{1\le i\le n}$ et $(Y_j)_{1\le j\le n}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, pour que la suite des matrices $(X_i.Y_j^{\mathrm{T}})$ soit orthonormée dans $E, ((.|.))$.

I.4. Matrices diagonalisables de rang 1

Soit A une matrice de rang 1 définie par $A = X.Y^{\mathrm{T}}$; soit a le réel $X^{\mathrm{T}}.Y$.

a. Démontrer que la matrice A annule un polynôme de degré 2. En déduire les valeurs propres possibles de A.

b. Pour quelles valeurs du réel a la matrice A est-elle diagonalisable ?

c. *Exemple* : considérer le cas suivant où $n = 3$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Discuter la diagonalisation de $A = X.Y^{\mathrm{T}}$ selon les valeurs de α.

d. Démontrer qu'il existe, dans E, une base de matrices diagonalisables de rang 1.

Partie II

Soient A et B deux matrices de E, $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de E défini par la relation :

$$\Phi_{A,B}(M) = A.M.B^{\mathrm{T}}.$$

Cette partie a pour but d'établir des propriétés de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$.

II.1. Rang de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$

Déterminer, en fonction des rangs r et s des matrices A et B, le rang de $\Phi_{A,B}$ (on calculera $\Phi_{A,B}(E_{ij})$).

II.2. Vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$

a. Démontrer que, si V et W sont des vecteurs propres des matrices A et B, la matrice $V.W^{\mathrm{T}}$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$.

b. Caractériser les matrices de rang 1 qui appartiennent au noyau de $\Phi_{A,B}$.

c. Soit $X.Y^{\mathrm{T}}$ une matrice de rang 1 vecteur propre associé à la valeur propre μ, différente de 0, de $\Phi_{A,B}$.
Est-ce que X et Y sont des vecteurs propres de A et B ?

d. Démontrer que, si A et B sont des matrices diagonalisables, l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est aussi diagonalisable. Calculer alors la trace de $\Phi_{A,B}$.

e. Déterminer les valeurs propres de $\Phi_{A,B}$, dans le cas suivant :

$$n = 2 \quad A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Phi_{A,B}$ est-elle diagonalisable ?

II.3. Propriétés d'orthogonalité de $\Phi_{A,B}$

a. L'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est supposé orthogonal dans $E, ((.|.))$, c'est à dire : pour toutes matrices M et N de E, $((\Phi_{A,B}(M)|\Phi_{A,B}(N))) = ((M|N))$.
En choisissant pour M et N deux matrices égales de rang 1, établir une relation simple, pour tout couple de vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$, entre $|A.X|^2$, $|B.X|^2$ et $|X|^2.|Y|^2$.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ soit orthogonal dans $E, ((.|.))$.

Partie III

Expression d'une matrice M de rang r à l'aide de matrices de rang 1

Désignons par m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé, dans la base canonique à une matrice M de rang r, et par m^* l'endomorphisme adjoint de m.

III.1. Valeurs propres de l'endomorphisme $m^* \circ m$

Démontrer que le rang de l'endomorphisme composé $m^* \circ m$ est égal à r. Établir l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $m^* \circ m$ telle que les valeurs propres α_i associées vérifient les relations :

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_r > 0 \text{ et, si } r < n,\ \alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = \alpha_n = 0.$$

III.2. **a.** Démontrer que les vecteurs $m(v_i)$ sont orthogonaux deux à deux. Calculer leurs normes.

b. En déduire qu'il existe deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(Z_i)_{1\leq i\leq n}$ telles que :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} Y_i.Z_i^{\mathrm{T}}.$$

Partie IV

Approximation d'une matrice de rang r par une matrice de rang $\leq s$ dans $E, ((.|.))$

La matrice M de rang r est donnée ainsi qu'un entier s vérifiant $s < r$; le but de cette partie est de déterminer une matrice P qui rende minimum la distance de M à l'ensemble $\mathcal{R}_s$ des matrices de rang $\leq s$. La distance de la matrice M à $\mathcal{R}_s$ est définie par la relation :

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{R}_s) = \inf\{\|M - N\|,\ N \in \mathcal{R}_s\}.$$

Il sera admis, dans la suite, que, si N est une matrice de rang q et M une matrice de rang r, la suite décroissante (γ_i) des valeurs propres de la matrice $(M-N)^{\mathrm{T}}.(M-N)$ vérifie, pour $1 \leq i \leq n-q$, l'inégalité :

$$\gamma_i \geq \alpha_{i+q}$$

où (α_i) est la suite décroissante des valeurs propres de $M^{\mathrm{T}}.M$.

IV.1. Le rang r de la matrice M est supposé > 1. Soit s un entier tel que $0 < s < r$.

a. Soit $M = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} Y_i.Z_i^{\mathrm{T}}$ la décomposition de M obtenue au III. Montrer que la matrice $N = \sum\limits_{i=1}^{s} \sqrt{\alpha_i} Y_i.Z_i^{\mathrm{T}}$ est de rang s.

En déduire l'inégalité

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{R}_s) \leq \sqrt{\alpha_{s+1} + \cdots + \alpha_r}.$$

b. Soit N une matrice de $\mathcal{R}_s$, comparer $\|M-N\|^2$ et $\alpha_{s+1} + \cdots + \alpha_r$.

c. En déduire la valeur de $\mathrm{d}(M, \mathcal{R}_s)$.

Existe-t-il une matrice P de $\mathcal{R}_s$ telle que $\|M-P\| = \mathrm{d}(M, \mathcal{R}_s)$?

d. Est-ce que $\mathcal{R}_s$ est un sous-ensemble fermé de E ?

IV.2. <u>Approximation par une matrice symétrique</u>

Soit s un entier, $1 \leq s \leq n$, soit $\mathcal{S}_s$ l'ensemble des matrices symétriques de rang $\leq s$. Soient A et B deux matrices respectivement symétriques et antisymétriques.

a. Que vaut $((A|B))$?

b. En utilisant la forme obtenue au III.2.b., démontrer qu'il existe une matrice symétrique U appartenant à $\mathcal{S}_s$ approchant A au plus près.

Évaluer $\|A-U\|$ à l'aide des valeurs propres λ_i de A (on suppose que les valeurs propres de A sont rangées de la manière suivante : $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$).

c. Soit M une matrice de E telle que $M = A + B$, où A symétrique, B antisymétrique. Démontrer qu'il existe une matrice symétrique V appartenant à $\mathcal{S}_s$ approchant M au plus près.

Donner la valeur de $\mathrm{d}(M, \mathcal{S}_s)$.

Y-a-t-il unicité de la matrice V ?