ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

***

CONCOURS D'ADMISSION 1990 — **MATHEMATIQUES** 2EME EPREUVE

OPTION M — (Durée de l'épreuve : 4 heures)

***

L'objectif du problème est de prouver que π^2 est irrationnel en utilisant la relation $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ce qui fait l'objet de la partie I, et une expression intégrale faisant intervenir la somme de cette série, ce qui est l'objet de la partie III. La partie II est consacrée à l'étude d'intégrales utiles pour la partie III.

PARTIE I

Dans cette partie, on désigne par f la fonction numérique paire, 2π - périodique sur $\mathbb{R}$, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1°) Montrer que f est développable en série de Fourier trigonométrique et expliciter ce développement.

2°) En déduire la somme de la série numérique : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

3°) En déduire le résultat annoncé au préliminaire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II

On désigne par K et Δ les parties de $\mathbb{R}^2$ définies par :

$K = [0, 1] \times [0, 1]$ et $\Delta = K \setminus \{(1, 1)\}$.

Soit $C(\Delta)$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur Δ, à valeurs réelles. Etant donné un élément f de $C(\Delta)$, on pose, pour tout réel y de $[0, 1[$:

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx.$$

On sait que F est continue sur $[0, 1[$; on pose alors pour tout réel α de $[0, 1[$:

$$I_\alpha(f) = \int_0^\alpha F(y)\, dy.$$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

On note enfin J le sous espace-vectoriel de $C(\Delta)$ constitué des fonctions f telles que $I_\alpha(f)$ admet une limite finie lorsque α tend vers 1. On pose dans ce cas :

$$I(f) = \lim_{\alpha \to 1} I_\alpha(f).$$

L'application $f \mapsto I(f)$ est une forme linéaire sur l'espace J.

1°) Soit f un élément de $C(\Delta)$ admettant un prolongement continu $\tilde{f}$ sur K. Montrer que f est un élément de J et que

$$I(f) = \iint_K \tilde{f}(x, y)\, dxdy.$$

2°) Soit h la fonction définie sur Δ par :

$$h(x, y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} .$$

a) Montrer que, pour tout élément (x, y) de K, on a :

$(1-x)(1-y) \leqslant (1-\sqrt{xy})^2$. En déduire que la limite de $h(x, y)$ est nulle lorsque (x, y) tend vers $(1, 1)$ dans Δ et qu'ainsi h est un élément de J.

b) Montrer que pour tout $(x, y) \in K$, on a les inégalités $0 \leqslant \tilde{h}(x, y) \leqslant g(\sqrt{xy})$, et que $\tilde{h}(x, y) = g(\sqrt{xy})$ si et seulement $x = y$, la fonction g étant définie sur $[0, 1]$ par :

$$g(u) = \frac{u^2\ (1-u)}{1+u} .$$

c) Montrer que g atteint son maximum en un point unique λ de $]0, 1]$, solution d'une équation du second degré que l'on explicitera et prouver que $g(\lambda) = \lambda^5$.

d) En conclure que $\displaystyle\sup_{(x, y)\in K} h(x, y) = \lambda^5$.

3°) Dans cette question et la suivante, on suppose $f(x, y) = \varphi(xy)$ où φ est une fonction positive continue sur $[0, 1[$. On pose, pour tout élément y de $[0, 1[$:

$$\psi(y) = \int_0^y \varphi(u)\, du.$$

a) Montrer que la fonction continue F est définie sur $[0, 1[$ par :

$$F(0) = \varphi(0) \text{ et } F(y) = \frac{1}{y}\, \psi(y) \text{ si } y \neq 0.$$

Montrer également : $\displaystyle I_\alpha(f) = \int_0^\alpha \frac{\psi(y)}{y}\, dy.$

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

b) Soit, par exemple, k étant un réel positif arbitraire :

$$\varphi(u) = \frac{1}{(1-u)^k}.$$

En considérant l'intégrale $I_\alpha(f)$, trouver les valeurs de k pour lesquelles f est un élément de J.

On distinguera les 3 cas : $k < 1$, $k = 1$, $k > 1$.

4°) On se propose de prouver que f appartient à J si et seulement si l'intégrale :

$\int_0^1 \varphi(u)(1-u)\,du$ est convergente et que :

$$I(f) = -\int_0^1 \varphi(y)\ln y\,dy.$$

a) Montrer que pour tout réel α de $[0, 1[$:

$$(1) \qquad \int_0^\alpha \psi(y)dy = \psi(\alpha)(\alpha - 1) + \int_0^\alpha \varphi(y)(1-y)dy.$$

b) En déduire que si :

$\int_0^1 \varphi(y)(1-y)dy$ est convergente, l'intégrale

$\int_0^1 \psi(y)dy$ est convergente et que f est un élément de J.

c) On suppose que f est un élément de J. Montrer que l'intégrale

$\int_0^1 \psi(y)\,dy$ est convergente et que

$\lim\limits_{\alpha \to 1} \psi(\alpha)(\alpha - 1) = 0$. Pour cette dernière propriété, on

pourra minorer l'intégrale :

$$\int_\alpha^{\frac{\alpha+1}{2}} \psi(y)\,dy.$$

En déduire que l'intégrale

$\int_0^1 \varphi(y)(1-y)\,dy$ est convergente. Montrer que l'intégrale

$\int_0^1 \varphi(y)\ln y\,dy$ converge et prouver enfin :

$$I(f) = -\int_0^1 \varphi(y)\ln y\,dy.$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

Soit f une fonction définie sur Δ par :

$$f(x, y) = \frac{P(x)\ Q(y)}{1 - xy}$$ où P et Q sont des polynômes réels.

1°) r et s étant deux entiers positifs ou nuls, on étudie le cas des fonctions :

$$g_{r,s}(x, y) = \frac{x^r\ y^s}{1 - xy} \quad .$$

a) Calculer :

$$G_{r,s}(y) = \int_0^1 g_{r,s}(x, y)\ dx$$

pour $y \in [0, 1[$. On utilisera un développement en série entière de : $x \mapsto \dfrac{1}{1 - xy}$

et on justifiera l'intégration terme à terme.

b) Exprimer $I_\alpha(g_{r,s})$ sous forme d'une série.

c) En déduire que $g_{r,s}$ est élément de J et calculer $I(g_{r,s})$ que l'on notera $I_{r,s}$. Montrer enfin que :

$$(2) \qquad I_{r,r} = \frac{1}{(r + 1)^2} + \frac{1}{(r + 2)^2} + \ldots + \frac{1}{(r + n)^2} + \ldots$$

et, si $r > s$,

$$I_{r,s} = \frac{1}{r - s}\left[\frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2} + \ldots + \frac{1}{r}\right] \quad .$$

2°) Les polynômes P et Q sont supposés maintenant à coefficients entiers.
On désigne par n le degré du polynôme de plus grand degré.

Montrer que f appartient à J et que I(f) est de la forme :

$$(3) \qquad I(f) = \frac{1}{d_n^2}\left(a_n + b_n\ \frac{\pi^2}{6}\right)$$

où a_n et b_n sont des entiers de $\mathbb{Z}$ et ou d_n désigne le plus petit commun multiple des n premiers naturels non nuls.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

3°) On pose :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n (1-x)^n)$$

pour tout réel x et on considère la fonction f_n définie sur Δ par :

$$f_n(x, y) = \frac{P_n(x)(1-y)^n}{1-xy} \quad .$$

a) Montrer que f_n appartient à J et que pour tout élément y de $[0, 1[$:

$$\int_0^1 f_n(x, y)\, dx = (-1)^n \int_0^1 \frac{(h(x, y))^n\, dx}{1-xy}$$

où h est la fonction définie dans la question II.2°).

b) En déduire que :

$$0 < |I(f_n)| \leqslant \lambda^{5n}\frac{\pi^2}{6}$$

λ étant le nombre introduit dans la partie II,2°).

c) Prouver d'autre part que $I(f_n)$ est de la forme (3). On posera :

$$I(f_n) = \frac{1}{d_n^2}\left(A_n + B_n\frac{\pi^2}{6}\right) \quad .$$

d) <u>On admet</u> que, pour tout entier n, $d_n \leqslant 3^n$. Montrer :

$$(4) \qquad \forall\, n\,,\ 0 < \left|A_n + B_n\frac{\pi^2}{6}\right| \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n\frac{\pi^2}{6} \quad .$$

e) A partir de cette relation (4), prouver finalement que π^2 est irrationnel.

FIN DU PROBLEME