Concours Centrale-Supélec 1994

Épreuve : MATHÉMATIQUES II **Option M, P'**

Notations

$\mathscr{E}$ est un espace euclidien orienté de dimension 3 rapporté à un repère orthonormal direct $R = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Si M est un point quelconque de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x, y, z) dans R, on écrit $M = (x, y, z)$. Le plan $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est noté plus simplement xOy. Un plan (resp. une droite) parallèle au plan xOy est dit(e) horizontal(e). Un plan (resp. une droite) perpendiculaire au plan xOy est dit(e) verticale.

Les cinq parties sont largement indépendantes les unes des autres.

Partie I - Étude d'une forme différentielle

Soit ω la forme différentielle définie en tout point $M = (x, y, z)$ de $\mathscr{E}$ par :

$$\omega(M) = -4xy^2z\,\mathrm{d}\,x + 4x^2yz\,\mathrm{d}\,y + \left(x^4 - y^4\right)\mathrm{d}\,z \tag{1}$$

et soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ tels que $x^2 - y^2 \neq 0$.

I.A - Dessiner l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ tels que $x^2 - y^2 = 0$.

I.B - Soit $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

I.B.1) Écrire une équation différentielle linéaire du premier ordre à laquelle doit satisfaire φ pour que la forme différentielle Ω définie en tout point $M = (x, y, z)$ de $\mathscr{D}$ par $\Omega(M) = \varphi(x^2 - y^2)\omega(M)$ soit exacte.

I.B.2) Déterminer alors φ telle que : $\varphi(1) = 1$, $\varphi(-1) = 1$.

I.C - En déduire une fonction $U : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que :

$$\mathrm{d}\,U = \Omega \tag{2}$$

Pour tout $M = (x, y, z)$ de $\mathscr{D}$ tel que $z = 0$, $\qquad U(M) = 0 \qquad (3)$

Partie II - Étude des surfaces de niveau de U

On appelle **surface de niveau** de U toute partie Σ_λ de $\mathscr{D}$ définie par $U(M) = \lambda$ où λ est un réel donné.

II.A - Montrer que, pour tout réel λ, l'éude de Σ_λ se ramène à celle de l'ensemble S_λ défini par l'équation

$$z\left(x^2 + y^2\right) - \lambda\left(x^2 - y^2\right) = 0 \tag{4}$$

II.B - Donner des éléments de symétrie de S_λ.

II.C -

II.C.1) Quel est l'ensemble S_0 ?

II.C.2) Pour $\lambda \neq 0$, comment l'ensemble $S_{-\lambda}$ se déduit-il de l'ensemble S_λ ?

Dans toute la suite du problème, on suppose $\lambda > 0$.

II.D - Étude de l'intersection $C_{\lambda,1}$ de S_λ avec le plan P_1 d'équation $z = x\sqrt{3} - y$.

II.D.1) Écrire une équation polaire de la projection orthogonale $C'_{\lambda,1}$ de $C_{\lambda,1}$ sur le plan xOy.

II.D.2) Construire $C'_{\lambda,1}$. On précisera notamment les tangentes à l'origine, l'asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote. La recherche systématique des points multiples et des points d'inflexion n'est par contre pas demandée.

II.E - Étude de l'intersection $C_{\lambda,2}$ de S_λ avec le plan P_2 d'équation $z = x$.

II.E.1) Montrer que la projection orthogonale $C'_{\lambda,2}$ de $C_{\lambda,2}$ sur le plan xOy peut être représentée paramétriquement par

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \lambda\dfrac{t-t^3}{1+t^2} \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

II.E.2) Construire $C'_{\lambda,2}$. On précisera notamment les tangentes à l'origine, l'asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote. La recherche systématique des points multiples et des points d'inflexion n'est par contre pas demandée.

II.E.3) $C'_{\lambda,2}$ présente une boucle. Montrer que la longueur L de cette boucle est donnée par :

$$L = 2\lambda \int_0^1 \frac{\sqrt{t^4 + rt^2 + s}}{t^2+1}\,\mathrm{d}\,t$$

où r et s sont deux réels que l'on explicitera. Donner, sans chercher à calculer exactement l'intégrale, une valeur approchée à 10^{-3} près de $L/(2\lambda)$.

II.E.4) Calculer l'aire A intérieure à la boucle précédente. On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de A/λ^2.

Partie III - Étude des droites tracées sur S_λ

III.A -

III.A.1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intersection de S_λ avec le plan Π_t d'équation $y = tx$ est la réunion d'une droite verticale, que l'on précisera, et d'une droite horizontale $\Delta_{\lambda,t}$ dont on explicitera un système d'équations.

III.A.2) En déduire l'ensemble des droites horizontales incluses dans S_λ.

III.B -

III.B.1) Établir que toute droite non horizontale de $\mathscr{E}$ peut être définie de façon unique par un système d'équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right. \qquad a, b, p, q \text{ réels} \tag{6}$$

III.B.2) Déterminer les droites non horizontales tracées sur S_λ.

Partie IV - Définition géométrique de S_λ

IV.A - Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S_λ et soit $t \in \mathbb{R}$. Écrire les coordonnées de la projection orthogonale $H_{0,t}$ de M_0 sur la droite définie par le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} y = tx \\ z = \lambda\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right. \tag{7}$$

IV.B - Montrer que, quand t varie dans $\mathbb{R}$, H_0 appartient à un plan fixe Q_0 dont on donnera une équation. Vérifier que $M_0 \in Q_0$.

IV.C - Donner une équation de la projection orthogonale Γ'_0 sur le plan xOy de la courbe Γ_0 décrite par $H_{0,t}$ quand t varie dans $\mathbb{R}$ et en déduire la nature géométique de Γ_0.

IV.D - À partir des trois questions précédentes, donner une définition géométrique de la surface S_λ.

Partie V -Étude de certaines courbes tracées sur S_λ

Dans toute cette dernière partie, on note (ρ, θ, z) un système de coordonnées semi-polaires (ou cylindriques) de $M = (x, y, z)$ et on ne considère que ceux des points M pour lesquels $\rho \neq 0$. On rappelle que, si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}$, on a : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u} + z\overrightarrow{k}$.

V.A - Écrire une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier (ρ, θ, z) pour que M appartienne à S_λ.

V.B - Soit M un point de S_λ de coordonnées semi-polaires (ρ, θ, z) avec $\rho \neq 0$.

Trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (α, β, ρ) dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ soit normal en M à S_λ.

V.C - Soit $\psi :]0, \pi/2[\to \mathbb{R}^*$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. La relation $\rho = \psi(\theta)$ définit une courbe tracée sur S_λ.

Donner les coordonnées dans la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ d'un vecteur $\overrightarrow{N}$ orthogonal au plan osculateur à $L_{\lambda,\psi}$ au point M de S_λ de coordonnées semi-polaires $(\psi(\theta), \theta, z)$.

V.D -

V.D.1) À quelle condition le plan osculateur en M à $L_{\lambda,\psi}$ et le plan tangent en M à S_λ coïncident-ils constamment lorsque i parcourt $L_{\lambda,\psi}$?

V.D.2) Expliciter alors ψ.

V.D.3) Construire la projection orthogonale sur le plan xOy de la courbe $L_{\lambda,\psi}$ qui passe par le point A de coordonnées $(1, 1, 0)$ dans R.

••• FIN •••
