BanQue PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Le sujet comporte un problème en deux parties et un exercice indépendants

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME

Partie I

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, on considère la conique $\mathcal{E}_p$ d'équation :

$$x^2+y^2-2pxy+2(py-x)=0, \quad p \text{ désigne un réel.}$$

On désigne par P le point de coordonnées $(0,\,\alpha)$ avec α réel non nul et par Q le point de coordonnées $(0,\,2\alpha)$.

1. Dans cette question, on suppose $p=0$.
   (a) Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}_0$.
   (b) Former les équations des tangentes à $\mathcal{E}_0$ menées par P. On désigne par (D) la tangente non verticale.
   (c) Former les équations des tangentes à $\mathcal{E}_0$ menées par Q. On désigne par (D') la tangente non verticale.
   (d) Déterminer les coordonnées du point R, intersection des droites (D) et (D').
   (e) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points R lorsque α décrit $\mathbb{R}^\star$. Déterminer la nature de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel p, la nature de $\mathcal{E}_p$.
3. Donner les vecteurs directeurs des axes ainsi que le centre ω_p, lorsqu'il existe, de $\mathcal{E}_p$.

Partie II

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$, on considère les points $A(0,\,0,\,1)$ et $B(1,\,1,\,2)$. On désigne par Δ_1 la droite (AB) ; par Δ_2 la droite d'équations $y=z=0$; par Δ_3 la droite d'équations $x+y=0,\ y+z=-1$; Δ_4 la droite d'équations $x-z=2,\ y-2z=1$; par Δ_5 la droite d'équations $x=y=z$.

1. Donner une représentation paramétrique de Δ_1.
2. On considère le point M_1 de Δ_1 d'abscisse a et le point M_2 de Δ_2 d'abscisse b ; donner une représentation paramétrique de la droite (M_1M_2).
3. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a et b la droite (M_1M_2) a-t-elle une intersection non vide avec Δ_3 ?
4. On suppose dans cette question que la droite (M_1M_2) a une intersection non vide avec Δ_3. Donner une représentation paramétrique de (M_1M_2), on veillera à ce que le paramètre a n'apparaisse plus.
5. Soit une droite Δ' qui rencontre les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 ; montrer qu'elle est incluse dans la quadrique $\mathcal{Q}$ d'équation $xz=y(y+1)$.
6. Déterminer la nature de cette quadrique dont le centre a pour coordonnées $\left(0,\,-\frac{1}{2},\,0\right)$.
7. Vérifier que les droites Δ_4 et Δ_5 ne sont pas coplanaires.
8. Donner un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux droites Δ_4 et Δ_5.

9. On désigne par $\mathcal{S}$ la surface de révolution engendrée par la rotation de la droite Δ_4 autour de la droite Δ_5.
   (a) Donner une équation de la surface $\mathcal{S}$.
   On écrira cette équation sous la forme $\varphi(x,\, y,\, z) = 0$.
   (b) Les coordonnées $(x_\Omega,\, y_\Omega,\, z_\Omega)$ du centre Ω de cette surface sont les solutions du système :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\, y,\, z) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,\, y,\, z) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(x,\, y,\, z) = 0 \end{cases}.$$
   Déterminer les coordonnées de Ω.
   (c) Donner une équation réduite de la surface $\mathcal{S}$ dans le repère $(\Omega\,;\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$.
   En déduire la nature de $\mathcal{S}$.

EXERCICE

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On dit qu'un endomorphisme u de E est cyclique si, et seulement s'il existe un vecteur x de E tel que

$$E = \mathrm{Vect}(x,\, u(x),\, u^2(x),\, u^3(x), \cdots) = \mathrm{Vect}(u^k(x),\, k \in \mathbb{N}).$$

On rappelle que $u^0 = Id_E$ et que, pour tout entier k strictement positif $u^k = u \circ u^{k-1}$.

1. Dans cette question, $n = 2$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique de E est
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que f est cyclique.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f.
   (c) Donner une base de E dans laquelle f a une matrice diagonale.
2. Dans cette question, $n = 3$. On considère l'endomorphisme g de E dont la matrice dans la base canonique de E est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que g est cyclique.
   (b) Déterminer les valeurs propres de g.
   (c) Donner une base de E dans laquelle g a une matrice triangulaire supérieure.
3. On se replace dans le cas où n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2. On considère un endomorphisme h de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1,\, \lambda_2, \cdots,\, \lambda_n$, associées respectivement aux vecteurs propres $x_1,\, x_2, \cdots,\, x_n$; à l'aide du vecteur $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, montrer que h est cyclique.