E99H

BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

A rendre avec la copie deux feuilles de papier millimétré

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultat non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Partie I

On se place dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le produit scalaire usuel entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit (C) la conique d'équation cartésienne

$$y^2-\sqrt{3}xy-2\sqrt{3}x+(4-3\sqrt{3})y+6-6\sqrt{3}=0.$$

1. On considère le point O' de coordonnées $(-3,-2)$. Donner une équation cartésienne de (C) dans le repère $(O';\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Soit A la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}$.
   (a) Calculer les valeurs propres de A. Trouver deux vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u},\vec{v})$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

(b) Quelle isométrie du plan transforme le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en le repère $(O';\vec{u},\vec{v})$?

(c) Donner une équation cartésienne (C) dans le repère $(O';\vec{u},\vec{v})$.

(d) Quelle est la nature de la conique (C) ?

3. Déterminer les sommets de (C) dans le repère $(O';\vec{u},\vec{v})$ puis dans le repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
4. Déterminer les asymptotes de (C) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
5. Dessiner la conique (C). On prendra $\sqrt{3} \simeq 1,732$.

Partie II

On considère dans le plan $\mathcal{P}$ la courbe d'équation polaire

$$\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}.$$

1. Déterminer l'ensemble des réels θ pour lesquels $\rho(\theta)$ est bien défini.
2. Vérifier qu'il suffit d'étudier la fonction ρ pour $\theta \in [0,\pi/4]$. Par quelle(s) transformation(s) du plan obtient-on l'ensemble de la courbe à partir de cette étude ?
3. Etudier les variations de ρ.
4. Déterminer l'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses. On admettra que la courbe admet une tangente horizontale en ce(s) point(s).
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe au point de paramètre $\theta \in]0,\pi/4]$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
6. Dessiner la courbe.

Partie III

Soit Ω un point du plan et soit R un réel strictement positif.

1. Etant donné un point M du plan, combien existe-il de points M' vérifiant :
   - Les point M, M' et Ω sont alignés,
   - $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = R^2$?
2. On considère l'application ϕ, de $\mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ dans lui même, qui, à tout point M distinct de Ω associe le point M' tel que
   - Les point M, M' et Ω sont alignés,
   - $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = R^2$.

   Montrer que l'application ϕ est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.
3. Quelle est l'image par ϕ du cercle de centre Ω et de rayon R ?
4. Quelle est l'image par ϕ d'un cercle de centre Ω et de rayon $r \neq R$?
5. Quelle est l'image par ϕ d'une droite passant par Ω ?
6. Soit M un point du plan d'affixe complexe z. On note z_Ω l'affixe de Ω et z' l'affixe de M', image de M par ϕ.

   (a) Déterminer, en fonction de R, Ω et M, le réel λ tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$

   (b) Vérifier que
   $$z' = z_\Omega + \frac{R^2}{\overline{z - z_\Omega}}.$$

7. On suppose dans cette question que $z_\Omega = 1$ et $R = 1$.
   (a) Déterminer le module et l'argument du point $M(\theta)$ d'affixe
   $$z = \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\theta}\right)$$
   avec $\theta \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer l'ensemble A des réels θ pour lesquels $M(\theta) \neq \Omega$.
   (c) Pour $\theta \in A$, déterminer l'image par ϕ du point $M(\theta)$ (on précisera le module et l'argument de son affixe).
   (d) Déterminer l'image par ϕ du cercle de diamètre $[O, \Omega]$, privé de Ω.
   (e) Déterminer l'image par ϕ de l'axe des ordonnées.
8. Soit (E) l'ellipse d'équation
   $$3x^2 + 4y^2 = 12.$$
   (a) Déterminer l'excentricité et les foyers de cette ellipse.
   (b) On note F le foyer d'abscisse positive. Vérifier qu'une représentation polaire de (E) dans le repère $(F; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est
   $$\rho(\theta) = \frac{3}{2 + \cos\theta}.$$
   (c) Dans cette question uniquement, on suppose que les points F et Ω sont confondus, et que $R = 1$. Déterminer une équation polaire dans le repère $(F; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de l'image de (E) par ϕ.
9. Dans cette question uniquement, on suppose que les points O et Ω sont confondus, et que $R = \sqrt{2}$. (H) étant l'hyperbole d'équation $xy = 1$, déterminer l'image de (H) par ϕ (on pourra commencer par déterminer une représentation polaire de (H)). Comment obtient-on cette courbe à partir de la courbe étudiée dans la partie II ?

Partie IV

On se place maintenant dans l'espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ un cône de sommet S s'appuyant sur $(\mathcal{E})$. Nous cherchons une condition sur S pour que $(\mathcal{C})$ soit de révolution.

Pour des raisons de symétrie, si le cône $(\mathcal{C})$ est de révolution, le sommet S appartient au plan $(O; \vec{\imath}, \vec{k})$. On supposera donc dans toute cette partie que S a pour coordonnées $(x_0, 0, z_0)$ avec $z_0 \neq 0$.

1. Soit M le point de coordonnées (x_M, y_M, z_M). Donner une équation paramétrique de la droite passant par S et M.
2. En déduire qu'une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(S; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est
   $$\frac{(x_0 Z - z_0 X)^2}{4} + z_0^2 Y^2 - Z^2 = 0.$$

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{z_0^2}{4} & 0 & -\frac{x_0 z_0}{4} \\ 0 & z_0^2 & 0 \\ -\frac{x_0 z_0}{4} & 0 & \frac{x_0^2}{4} - 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

   (b) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

   (c) Montrer que le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{x_0^2 + z_0^2 - 4}{4}\right)\lambda - \frac{z_0^2}{4}$$

   ne peut pas admettre de racine double.

   (d) En déduire que la matrice A admet une valeur propre double si et seulement si z_0^2 est racine du polynôme P.

4. Déterminer l'ensemble des sommets S pour lesquels le cône $(\mathcal{C})$ est de révolution.