❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultat non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Soit E un espace vectoriel et φ un endomorphisme de E. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par φ si et seulement si

$$\forall u \in F, \quad \varphi(u) \in F$$

ce qui s'écrit également

$$\varphi(F) \subset F.$$

Préliminaire

Donner une condition <u>nécessaire et suffisante</u> pour qu'une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels soit diagonalisable.

Partie I

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme φ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A_φ est diagonalisable.
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A_φ.
   Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
   Quelle est la dimension des sous-espaces propres ?
3. Déterminer une base (c_1, c_2, c_3) de vecteurs propres de φ.
4. On pose $D_1 = Vect(c_1)$. Montrer que D_1 est stable par φ.
5. On pose $P_1 = Vect(c_2, c_3)$. Montrer que P_1 est stable par φ.

Partie II

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les endomorphismes f et g dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_g = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les matrices A_f et A_g sont diagonalisables.
2. Vérifier que les endomorphismes f et g commutent.
3. Déterminer tous les vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1.
   Vérifier que ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de g.
4. Déterminer le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1.
   Vérifier que ce sous-espace propre est stable par g.

Partie III

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme ϕ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A_ϕ.
2. La matrice A_ϕ est-elle diagonalisable ?
3. Montrer qu'une droite vectorielle $Vect(u)$ $(u \neq 0)$ est stable par ϕ si et seulement si u est un vecteur propre de ϕ.
   En déduire toutes les droites vectorielles stables par ϕ.

4. Montrer que ϕ est bijectif.
5. Montrer que, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $dim\,\phi(F) = dim\,F$.
6. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est stable par ϕ si et seulement si $\phi(F) = F$.
7. Soient α, β, γ des réels non tous nuls et

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}.$$

Soit ψ la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\psi(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

(a) Donner la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Vérifier que $\phi^{-1}(H) = Ker\,\psi \circ \phi$.

(c) Montrer que H est stable par ϕ si et seulement si $Ker\,\psi \circ \phi = Ker\,\psi$.

(d) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F de dimension 1 tel que

$$\mathbb{R}^3 = Ker\,\psi \oplus F.$$

(e) Montrer que, si ψ_1 et ψ_2 sont deux applications linéaires non identiquement nulles de F dans $\mathbb{R}$, alors il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$\forall x \in F, \qquad \psi_1(x) = \lambda \psi_2(x).$$

(f) En déduire que H est stable par ϕ si et seulement si il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad \psi \circ \phi(x) = \lambda \psi(x).$$

(g) En écrivant la relation précédente sous forme matricielle, montrer que H est stable par ϕ si et seulement si le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA_\phi$.

(h) En déduire tous les plans vectoriels stables par ϕ.

Partie IV

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On suppose $\dim E \geq 2$. On note $\langle u|v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u et v et $\|u\|$ la norme du vecteur u. On se donne un vecteur a de E de norme 1 et, pour tout réel $\alpha \neq 0$, on pose, pour tout $x \in E$,

$$f_\alpha(x) = x + \alpha\,\langle x|a\rangle\,a.$$

1. Vérifier que f_α est un endomorphisme de E.
2. Montrer que pour tous réels non nuls α, β, $f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$.
3. Montrer que pour tous vecteurs x et y, on a $\langle x|f_\alpha(y)\rangle = \langle f_\alpha(x)|y\rangle$.
4. Vérifier que a est un vecteur propre de f_α.

5. Montrer que 1 est valeur propre de f_α.
   Quel est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ?
   L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?
6. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.
7. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il une isométrie (i.e., pour tout x de E, $\|f_\alpha(x)\| = \|x\|$) ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.
8. En utilisant la question 3, montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f_α, alors $F^\perp$ est également stable par f_α.