❋ BANQUE FILIERE PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-A

durée 4h

Les trois exercices sont indépendants. Ils seront rédigés sur des copies distinctes regroupées dans l'une d'entre elles formant chemise.

Exercice n° 1 :

Soit $E = \mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

On note $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le produit vectoriel et on rappelle la formule du double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\,\vec{w}$

On note $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times E$ l'ensemble des éléments $Q = (x, \vec{u})$ où $x \in \mathbb{R}$ et $\vec{u} \in E$.

1°) On définit sur $\mathbb{H}$ la loi de composition suivante :

$$(x, \vec{u}) * (x', \vec{u}') = (x x' - \vec{u}.\vec{u}', x \vec{u}' + x' \vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{u}')$$

Montrer que $*$ est une loi de composition interne.

Préciser l'élément neutre et montrer que l'inverse de $Q = (x, \vec{u})$, quand il existe, est $\left(\dfrac{x}{x^2 + \vec{u}.\vec{u}}, \dfrac{-\vec{u}}{x^2 + \vec{u}.\vec{u}}\right)$ que l'on notera Q^{-1}.

En déduire que $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{ (0,\vec{0}) \}$ muni de la loi $*$ possède une structure de groupe non commutatif. (Pour éviter un calcul fastidieux, on admettra l'associativité).

2°) $Q \in \mathbb{H}$ étant donné, quels sont les éléments $Q' = (x', \vec{u'}) \in \mathbb{H}$ tels que :

$$Q * Q' = Q' * Q \text{ ?}$$

En déduire que les éléments $Q' \in \mathbb{H}$ tels que : $Q * Q' = Q' * Q$ pour tout $Q \in \mathbb{H}$ sont de la forme $(x', \vec{0})$.

3°) Si $Q = (x, \vec{u})$, on note $\overline{Q}$ l'élément $(x, -\vec{u})$.

Etablir que $\overline{Q*Q'} = \overline{Q'} * \overline{Q}$ et que $Q * \overline{Q}$ est de la forme $(q, \vec{0})$ avec $q \in \mathbb{R}^+$.

Ce réel q est noté $\mathrm{N}(Q)$. Établir l'égalité : $\mathrm{N}(Q * Q') = \mathrm{N}(Q)\ \mathrm{N}(Q')$.

Soit S l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}$ qui s'écrivent sous la forme $(\cos\theta, \sin\theta\ \vec{a})$ où θ appartient à $\mathbb{R}$ et $\vec{a}$ est un vecteur unitaire de E.

Montrer que tout élément Q de S vérifie $\mathrm{N}(Q) = 1$. Étudier la réciproque.

S est-il un sous groupe de $(\mathbb{H}^*, *)$?

4°) Soit $\mathcal{R}$ la rotation vectorielle de E d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\vec{a}$ et d'angle de mesure θ.

Montrer que l'image par $\mathcal{R}$ d'un vecteur $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{a}$ est donnée par :

$$\mathcal{R}(\vec{v}) = \cos\theta\ \vec{v} + \sin\theta\ \vec{a} \wedge \vec{v}$$

En déduire l'image par $\mathcal{R}$ d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque de E.

5°) Si $Q \in$ S, on considère l'application Φ_Q de $\mathbb{H}$ dans lui-même, définie par :

$$\Phi_Q(M) = Q * M * Q^{-1}$$

Montrer que l'image de $M = (x, \vec{u})$ est de la forme $\Phi_Q(M) = (x, \mathcal{R}_Q(\vec{u}))$ où $\mathcal{R}_Q$ est une rotation vectorielle de E, ne dépendant que de Q.

Quel est son axe ? la mesure de son angle ?

6°) Montrer que l'application : $Q \mapsto \mathcal{R}_Q$ de S dans le groupe des rotations de E, noté $\mathrm{O}^+(\mathrm{E})$, est un morphisme surjectif de groupes.

Que peut-on dire de Q et Q' si $\mathcal{R}_Q = \mathcal{R}_{Q'}$? Conclure.

Exercice n° 2 :

On pose $\varphi(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$

et $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\, dt$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1°) Montrer que φ est une fonction définie et continue de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et qu'elle peut être prolongée par continuité en 0.
Établir que φ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et la calculer en posant $t = 1/u$.

2°) Établir l'inégalité $\ln(1+u) \leq \sqrt{u}$ pour $u \geq 0$.
Montrer que f est une fonction définie de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $A > 0$. Montrer que f est continue sur $[0,A]$.
En déduire que f est continue sur $[0,+\infty[$.

3°) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que f est de classe C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$.
En déduire que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
Pour $x \neq 0$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle en t :

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}$$

En déduire l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$.

4°) Exprimer f à l'aide de φ. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

5°) Établir l'inégalité $\ln(1+u) \geq \frac{u}{1+u}$ pour $u \geq 0$.
Montrer : $\frac{f(x)-f(0)}{x} \geq f'(x)$ pour $x > 0$.
f est-elle dérivable en 0 ?
La courbe représentative de f admet-elle une tangente en 0 ?

Exercice n° 3 :

Soit θ un réel. On note sh la fonction sinus hyperbolique et $\ln$ la fonction logarithme népérien.

1°) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2\,sh(\theta) & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire ses valeurs propres (On pourra les exprimer à l'aide de la fonction exponentielle).
A est-elle diagonalisable ?
Donner une base orthonormée de vecteurs propres. On distinguera deux cas selon les valeurs de θ.

2°) Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé $\Re_1$, on considère la surface (S) d'équation :

$$2\,sh(\theta)\, x^2 + y^2 + 2\,x\,z - 2\,y = 0$$

Montrer que le point Ω de coordonnées $(0,1,0)$ dans le repère $\Re_1$ est centre de symétrie.

Quelle est la nature de (S) ?

Soit $\Re_2$ le repère orthonormé dans lequel l'équation de (S) se ramène à :

$$X^2 + e^{\theta} Y^2 - e^{-\theta} Z^2 = 1$$

Expliciter les formules donnant les nouvelles coordonnées (X,Y,Z) en fonction des anciennes (x,y,z).

3°) Dans le repère $\Re_2$, étudier la nature de l'intersection de (S) avec les plans d'équations $X = h$ ($h \in \mathbb{R}$), puis $Z = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Dans le cas particulier $\theta = ln\ 2$, tracer sur des figures planes différentes les intersections correspondant à $h = 1$ et $h = 3$ dans le plan $Y\Omega Z$ puis $k = 0$ dans le plan $X\Omega Y$.

4°) Soient a, b, c des réels tels que $a^2 + b^2 = 1 + c^2$.

Montrer qu'il existe un réel α tel que :

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \quad \text{et} \quad b = \frac{\sin\alpha}{\cos\gamma}$$
$$\text{où} \quad \gamma = \operatorname{Arctan} c$$

En posant $\alpha = \beta - \gamma$, en déduire qu'il existe un réel β tel que :

$$a = \cos\beta + c\sin\beta$$
$$b = \sin\beta - c\cos\beta$$

5°) On considère la famille de droites D_v, $v \in \mathbb{R}$, donnée dans le repère $\Re_2$, par :

$$\begin{aligned} X &= \cos v + u \sin v \\ Y &= e^{-\theta/2} \sin v - e^{-\theta/2}\, u \cos v \qquad \text{pour } u \in \mathbb{R} \\ Z &= e^{\theta/2}\, u \end{aligned}$$

Montrer que les droites D_v sont contenues dans (S) et qu'elles l'engendrent.

(S) est-elle développable ? Pourquoi ?