Banque <<Agro -Véto>>
A - 0509

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE B

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le problème se compose de trois parties largement indépendantes.

L'objet du problème est l'étude et la modélisation d'un procédé ultra-rapide de greffes de rosiers. Lorsqu'une greffe est opérée, on sait au bout d'une semaine si elle a pris ou non. On suppose que la probabilité qu'une greffe donnée prenne est constante, égale à $p \in]0,1[$. On notera $q = (1-p)$.

On veut greffer R rosiers où R est un entier supérieur ou égal à 1. Pour chacun d'entre eux, on opère une greffe. Chaque semaine, si la greffe ne prend pas, on recommence jusqu'à ce qu'elle prenne effectivement. On suppose que toutes ces expériences sont mutuellement indépendantes.

Pour tous entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, le coefficient «$p$ parmi n» est noté $\binom{n}{p}$ et vaut : $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

PARTIE I

I.1 On appelle G le nombre de greffes nécessaires à la prise de la greffe d'un rosier donné.
Déterminer la loi de G, son espérance et sa variance.

I.2 On greffe simultanément les R rosiers, qui seront numérotés de 1 à R. On désigne par X_k la variable aléatoire égale au nombre de greffes nécessaires à la prise de la greffe du rosier k , $1 \leqslant k \leqslant R$, et par X le nombre total de greffes nécessaires pour que les greffes prennent sur les R rosiers. Les variables aléatoires X_k sont évidemment indépendantes.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_k pour $1 \leqslant k \leqslant R$?

b) Exprimer X en fonction des X_k, $1 \leqslant k \leqslant R$.

c) Calculer l'espérance et la variance de X.

I.3 On se propose de chercher la loi de X.

a) Déterminer l'ensemble I des valeurs prises par X.

b) Soit $n \in I$.

i) Soit $(x_1, \ldots, x_R)$ un R-uplet de $(\mathbb{N}^*)^R$ tel que $x_1 + \cdots + x_R = n$.
Exprimer $P(X_1 = x_1; \ldots; X_R = x_R)$ en fonction de p,q,n et R.

ii) On note (E) l'équation $x_1 + \cdots + x_R = n$ et $\alpha(R, n)$ le nombre de R-uplets $(x_1, \ldots, x_R)$ de $(\mathbb{N}^*)^R$ solutions de (E). A l'aide du résultat de la question précédente, montrer que

$$P(X = n) = \alpha(R, n)p^R q^{n-R}$$

I.4 On considère le segment $S = [0, n]$ gradué d'unité en unité de 0 à n. On partage S en R segments, non réduits à un point, dont les extrémités sont sur les graduations.

a) Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des solutions de (E) et l'ensemble des partages de S ainsi définis (On pourra s'aider d'un dessin).

b) Montrer qu'on obtient un tel partage de S en choisissant $R-1$ points distincts de la graduation d'abscisses comprises entre 1 et $n-1$.

c) En déduire $\alpha(R, n)$. Donner la loi de probabilité de X.

PARTIE II

On se propose d'étudier le nombre Y de semaines nécessaires à la prise des greffes sur les R rosiers. Pour chaque rosier, le nombre de semaines nécessaires est égal au nombre de greffes nécessaires.

Donc $Y = \max\{X_1, \ldots, X_R\}$, les variables X_k ayant été définies dans la partie I.

II.1 Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a) Montrer que $P(Y \leqslant n) = (1 - q^n)^R$.

b) En déduire $P(Y = n)$.

II.2 Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Dans cette question, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = P(Z = n)$ et $v_n = P(Z > n)$.
Soit N un entier naturel non nul.

a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer u_n en fonction de v_{n-1} et v_n.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - N v_N$.

En déduire que, si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum n u_n$ converge.

c) Exprimer v_N à l'aide d'un reste de la série de terme général u_n.

Montrer que, si la série $\sum n u_n$ converge, alors $\displaystyle N v_N \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} n u_n$

En déduire que la suite $(N v_N)$ converge et déterminer sa limite.

d) En déduire que Z possède une espérance si et seulement si la série $\sum v_n$ converge et que, dans ce cas, $\displaystyle E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Pour la suite de cette partie, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$**,** $v_n = 1 - (1 - q^n)^R$**.**

II.3 a) Donner un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

b) En déduire que $E(Y)$ existe et que $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

c) Calculer $E(Y)$ pour $R = 2$.

Dans les questions II.4, II.5 et II.6, on cherche à déterminer un équivalent de $E(Y)$ lorsque R tend vers l'infini.

II.4 On considère la fonction f définie par : pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = 1 - (1 - q^x)^R$.

a) Montrer que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.

b) Donner un équivalent de $f(x) - Rq^x$ lorsque x tend $+\infty$.

c) En déduire qu'il existe un réel A strictement positif tel que, pour $x > A$, $f(x) \leqslant Rq^x$; puis que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

d) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} q^x(1 - q^x)^k$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln q} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{k+1}$.

II.5 On veut obtenir un encadrement de $E(Y)$.

a) Soit n un entier naturel. Montrer que, pour tout $x \in [n, n+1]$, $v_{n+1} \leqslant f(x) \leqslant v_n$.

b) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{N+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N} v_n \leqslant \int_0^{N} f(x)\mathrm{d}x + 1$.

c) En déduire que $\displaystyle -\frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k} \leqslant E(Y) \leqslant -\frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k} + 1$

II.6 a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{R+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{R} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

b) En déduire que $E(Y) \sim -\dfrac{\ln R}{\ln q}$ quand R tend vers l'infini.

PARTIE III

Dans cette partie, on étudie l'évolution du processus sur plusieurs semaines. Pour cela, on considère la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que Y_0 égale 0 et pour tout entier $n \geqslant 1$, Y_n est le nombre de rosiers dont la greffe a pris à l'issue de la n-ième semaine.
On considère la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$,

III.1 Que représente Z_n ?

III.2 Déterminer la loi de Y_1 ; donner son espérance et sa variance.

III.3 a) Montrer que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $P(Y_{n+1} = l) = \displaystyle\sum_{m=0}^{l} P(Z_n = l - m | Y_n = m)P(Y_n = m) \quad (*)$.

b) Déterminer la loi conditionnelle de Z_n sachant $Y_n = m$ et vérifier qu'elle ne dépend pas de n.

III.4 a) En déduire que, pour tout $l \in \mathbb{N}$ tel que $l \leqslant R$,

$$P(Y_2 = l) = \sum_{m=0}^{l} \binom{R-m}{l-m} p^{l-m} q^{R-l} \binom{R}{m} p^m q^{R-m}.$$

b) Vérifier que, pour tout $(l, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant m \leqslant l \leqslant R$, $\displaystyle\binom{R}{m}\binom{R-m}{l-m} = \binom{R}{l}\binom{l}{m}$.

c) En déduire que $P(Y_2 = l) = \displaystyle\binom{R}{l} p^l \left(q^2\right)^{R-l} \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} q^{l-m}$.

d) Montrer que $P(Y_2 = l) = \displaystyle\binom{R}{l} \big(p(1+q)\big)^l \left(q^2\right)^{R-l}$ et en déduire que Y_2 suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres en fonction de R et de q.

III.5 En utilisant la relation $(*)$, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y_n suit la loi binomiale de paramètres R et $1 - q^n$.

III.6 Pour tout k, tel que $0 \leqslant k \leqslant R$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Y_n = k)$.

FIN DE L'ÉPREUVE