Banque << Agro >>
A et AE - 0503

MATHÉMATIQUES B
Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage de la calculatrice, d'abaques et de tables est interdit pour cette épreuve.

Les parties 2 et 3 du problème sont indépendantes. La première partie met en place des résultats qu'on utilise dans les autres parties.

Exposé du problème :
Un jeune artiste met en vente sur le web une de ses oeuvres et décide d'adopter le protocole suivant :

1°) Il étudiera au plus n propositions dans l'ordre où elles arriveront.

2°) Immédiatement après l'étude d'une proposition, il répondra à son correspondant soit en l'acceptant, auquel cas la vente se fait et il ne regarde pas les propositions ultérieures, soit en la refusant, auquel cas il passe à la proposition suivante.

On admettra que les propositions d'achat sont des variables aléatoires de même densité et mutuellement indépendantes.

Première partie :

I.1.a. Dans cette question on considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, de densités respectives f et g et la variable $Z = X - Y$, dont on rappelle que c'est une variable aléatoire de densité h définie par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(u-z)du.$$

Rappeler pourquoi l'évènement $[X = Y]$ a une probabilité nulle.
I.1.b. Soient $A_1, \dots, A_p, \dots$ une suite illimitée d'évènements d'un espace probabilisé ; démontrer par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) \leq \sum_{k=1}^{k=p} P(A_k).$$

I.1.c. Soient n un entier naturel, $n \geq 2$, et n variables à densité $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes ; montrer que l'évènement $\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} [X_i = X_j]$ a une probabilité nulle.
I.2. On considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout n entier naturel non nul par : $H_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$, $G_n = H_n - \ln(n)$ et $K_n = H_n - \ln(n+1)$.
I.2.a. Montrer que la suite de terme général G_n est décroissante.

Indication : On pourra étudier les variations de la fonction : $x \mapsto \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

T.S.V.P

I.2.b. Montrer que la suite de terme général K_n est croissante.
I.2.c. En déduire que les suites de termes généraux K_n et G_n convergent vers une même limite, qu'on notera par la suite γ.
I.2.d. Montrer que $\gamma \in]0,1]$.
I.3. On considère la suite $(S_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall r \in \mathbb{N}^*,\ S_r = \sum_{k=r+1}^{k=2r} \frac{1}{k}.$$

I.3.a. Montrer que pour tout r entier naturel non nul on a : $\frac{1}{2} \leq S_r < 1$.
I.3.b. Déduire du I.3.a. que $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ S_r + S_{2r} > 1$.

Deuxième partie :

Pour traiter cette partie, on admettra que pour tout couple (s, r) d'entiers naturels non nuls vérifiant $r < s$ on a : $\displaystyle\sum_{k=r}^{k=s} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$.
L'artiste décide d'adopter la stratégie suivante : il refuse systématiquement les r premières propositions $X_1, \ldots, X_r$ pour $1 \leq r \leq n-1$ et accepte s'il y a lieu la première offre supérieure au maximum des r premières propositions : $\displaystyle\max_{i\in\{1,\ldots,r\}} X_i$.
L'objet de cette partie est de déterminer r en fonction de n de sorte que la probabilité de vendre à la meilleure des n propositions soit maximale.

II.1. Montrer que l'évènement : "Au moins deux propositions d'achat prises parmi $X_1, \ldots, X_n$ sont égales." est presque impossible (c'est à dire de probabilité nulle).
On admettra dans toute la suite du problème que les offres faites à l'artiste sont distinctes deux à deux.

II.2.a. Déterminer la probabilité de l'évènement : $[X_k = \displaystyle\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i]$ pour $k \in \{1, \ldots, n\}$; en déduire la probabilité pour que le maximum $\displaystyle\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i$ soit atteint par l'une des variables $X_1, \ldots, X_r$, c'est à dire que la vente ne se fasse pas.

II.2.b. Déterminer pour $r \leq k \leq n$ la probabilité de l'évènement : " La vente ne s'effectue pas à l'issue de la k-ième proposition "
En déduire pour $r < k \leq n$ la probabilité de l'évènement : " La vente s'effectue à l'issue de la k-ième proposition " .

II.2.c. On désigne par T la variable aléatoire : " Nombre de propositions étudiées ". Vérifier que les valeurs prises par T sont comprises entre $r+1$ et n.

II.2.d. Montrer que $P[T = n] = \dfrac{r}{n-1}$ et que pour tout k entier naturel compris entre $r+1$ et $n-1$, on a :

$$P[T = k] = \frac{r}{k(k-1)}.$$

II.2.e. Vérifier que

$$\sum_{k=r+1}^{k=n} P[T=k] = 1.$$

Indication : On pourra utiliser l'égalité : $\forall k \in \{r+1,\ldots,n-1\}, \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

II.2.f. Montrer que l'espérance de T est $E(T) = r(\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{n-1} + 1)$.

II.3. Pour n entier naturel strictement supérieur à 4, et pour $r \in \{1,\ldots,n\}$, on désigne par $p_{n,r}$ la probabilité que la vente s'effectue à la meilleure des n propositions. On admettra que $p_{n,r} = \frac{r}{n}(\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{n-1})$.

II.3.a. Déterminer pour r fixé la limite éventuelle de $p_{n,r}$ quand n tend vers $+\infty$.

II.3.b. Pour n fixé on étudie la suite de terme général $p_{n,r}$ pour $r \in \{1,\ldots,n-1\}$. On note désormais $\delta_r = n(p_{n,r+1} - p_{n,r})$ pour $r \in \{1,\ldots,n-2\}$. Montrer que $\delta_r = H_{n-1} - H_r - 1$ et que la suite de terme général δ_r pour $r \in \{1,\ldots,n-2\}$ est strictement décroissante.

II.3.c. Montrer que $\delta_1 > 0$ et que $\delta_{n-2} < 0$.

II.3.d. En utilisant la remarque préliminaire de la partie II, montrer qu'il existe un unique q tel que $\delta_q < 0$ et $\delta_{q-1} > 0$. On notera désormais $r(n) = q$. Montrer que le maximum de $p_{n,r}$ pour $r \in \{1,\ldots,n-1\}$ vaut $p_{n,r(n)}$.

II.4. Dans cette question on étudie les suites $r(n)$ et $p_{n,r(n)}$ définies ci-dessus.

II.4.a. Montrer que $2r(n) - 2 < n - 1 \leq 4r(n)$.

II.4.b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} r(n) = +\infty$.

II.4.c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_{r(n)} = 0$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_{n-1} - H_{r(n)}) = 1$.

II.4.d. En utilisant les suites de termes généraux G_n ou K_n de la première partie, déduire de ce qui précède que :

$$\lim_{n\to+\infty} [\ln(n-1) - \ln(r(n))] = 1$$

et que $\lim\limits_{n\to+\infty} [\dfrac{r(n)}{n}] = \dfrac{1}{e}$.

II.4.e. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n,r(n)} = \dfrac{1}{e}$.

T.S.V.P

Troisième partie :

Dans cette partie n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Les n propositions sont des variables aléatoires indépendantes de même loi, uniforme sur $[0, 1]$.
L'artiste choisit désormais la stratégie suivante : il impose un seuil $s \in [0, 1[$ et vend à la première des propositions dépassant le seuil ou par défaut à la dernière proposition. Dans cette partie on examine quelle valeur de s donne une meilleure espérance de vente. On note V_n la variable aléatoire : " Montant de la vente ", et on recherche la fonction de répartition F_n de V_n.

III.1.a. Soit $x \in [0, s[$; vérifier l'égalité des évènements :

$$[V_n \leq x] = [(X_1 \leq s) \cap \cdots \cap (X_{n-1} \leq s) \cap (X_n \leq x)].$$

En déduire que pour tout $x \in [0, s[,\quad F_n(x) = s^{n-1}x.$

III.1.b. Soit $x \in]s, 1]$; vérifier l'égalité des évènements : $[V_n > x]$ et

$$[X_1 > x] \cup (\bigcup_{k=2}^{k=n} [(X_1 \leq s) \cap \cdots \cap (X_{k-1} \leq s) \cap (X_k > x)]).$$

En déduire que $\forall x \in]s, 1],\quad 1 - F_n(x) = (1 - x)\dfrac{1 - s^n}{1 - s}.$

III.1.c. Montrer que V_n possède une densité, qu'on notera f_n, vérifiant

$$\forall x \in]0, s[, f_n(x) = s^{n-1} \text{ et } \forall x \in]s, 1[,\ f_n(x) = \tfrac{1-s^n}{1-s} \quad .$$

III.2. Calculer $v_n(s)$ l'espérance de V_n. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} v_n(s) = \frac{1 + s}{2}.$$

III.3. Déterminer $v_n'(s)$ et montrer que $v_n(s)$ est maximal pour $s = e^{\frac{-\ln(n)}{n-1}}$. Calculer alors la limite de ce maximum lorsque n tend vers $+\infty$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

FIN.